

MÉMORIAL  
DES  
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,  
DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,  
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),  
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,  
Professeur à la Sorbonne,  
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LXV

La Balistique extérieure

Par M. ROBERT D'ADIÉMAR

Docteur ès sciences.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
Quai des Grands-Augustins, 55.

1934

## **AVERTISSEMENT**

---

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

---

---

LA

# BALISTIQUE EXTÉRIEURE

Par M. Robert D'ADHÉMAR,

Docteur ès sciences.

---

## PRÉFACE.

La Balistique extérieure est une science qui a pour but l'établissement des Tables de tir et, plus généralement, la connaissance complète des mouvements d'un projectile, avec une approximation suffisante.

L'artilleur doit exiger que le théoricien fasse une œuvre positive, qu'il ne traite pas ce problème de Mécanique en faisant fi des nécessités immédiates. Il faut néanmoins laisser au savant sa liberté; il faut éviter de couper ses ailes. Qui sait l'avenir? Telle doctrine qui, aujourd'hui, fait figure de chimère et qui ressemble à une quintessence de pure spéculation, peut demain, directement ou indirectement, jouer son rôle de guide pratique et utile.

Le domaine, que je vais explorer et décrire, est vaste et ma description doit être brève. En conséquence, je renonce à l'exactitude complète au point de vue historique et au point de vue du rôle des hommes de science dont l'effort commun a créé la Balistique. Si je sacrifie un peu les hommes, c'est pour essayer de mieux mettre en valeur les idées.

Je ne puis nommer chacun, je ne puis tout dire; je m'efforcerai simplement de mettre en relief des idées, des méthodes, des faits, en insistant sur les notions essentielles et sur les faits dominants.

Quelle est la méthode générale de la Balistique? Le problème complet du mouvement d'un projectile ne peut être posé dans toute son ampleur. La théorie serait impossible et les données numériques

sont, d'ailleurs, incomplètes, les lois de l'aérodynamique étant assez peu connues. Il faut commencer par une séparation d'effets divers, dont les uns, étant assez petits, seront négligés dans une première approximation.

Par exemple, la trajectoire du centre de gravité n'est pas plane, mais on commence par une première approximation qui simplifie la trajectoire et la rend plane.

Ultérieurement, pour étudier le mouvement autour du centre de gravité, on s'appuie d'abord sur la trajectoire plane, puis on avance en faisant des simplifications qui équivalent au fait de négliger, dans un mouvement pendulaire, la nutation, en conservant seulement la précession, élément principal en première approximation. La méthode consiste donc dans la superposition de phénomènes qui, en réalité, ne sont pas indépendants. Et cette méthode qui n'est pas rigoureuse, *in abstracto*, est justifiée par la connaissance du tir, par une intuition physique des phénomènes qu'une longue expérience a développée.

L'Analyse pure, elle aussi, connaît les approximations et il est des branches de l'Analyse qui ne sont qu'approximation. Mais les approximations successives, par exemple, entre les mains puissantes d'Émile Picard ou de Henri Poincaré, sont des méthodes analytiques d'une rigueur impeccable. On ne peut leur comparer l'approximation générale de la Balistique, qui a, comme support et comme contrôle, une intuition et une expérience de physicien. Le problème total de la balistique est morcelé; on crée artificiellement des étapes distinctes. Chaque étape correspond à un problème limité qui, lui, pourrait être étudié par des approximations précises. Mais souvent, pour le problème limité, on se contente d'une première approximation, sans en faire comme le premier anneau d'une chaîne. Le perfectionnement de l'approximation serait trop long, ou bien encore il serait incertain, en raison de l'absence de certaines données numériques.

*A priori*, une méthode d'approximation, parfaite au point de vue spéculatif, est désirable. Ne croyons pas cependant qu'une méthode théoriquement parfaite donnerait nécessairement la solution des problèmes balistiques. Il peut arriver qu'une méthode admirable, au point de vue philosophique et esthétique, contienne essentiellement des symboles dont le calcul numérique serait impraticable; et alors le but ne serait pas atteint.

Il faut reconnaître, d'autre part, que les approximations de la balistique extérieure, de par leur nature, contiennent en germe un danger : une approximation maladroite donnerait des phénomènes, non point une image, mais une caricature. Voilà la difficulté.

J'indique immédiatement les titres de quelques Ouvrages récents, qui offrent un intérêt de premier ordre :

Ingénieur général CHARBONNIER, *Essais sur l'histoire de la Balistique* (*Mémorial de l'artillerie française*, 1928); SUGOT, *Balistique extérieure théorique* (Gauthier-Villars, 1928); *Traité de Balistique extérieure*, par CHARBONNIER (Doin et Gauthier-Villars), t. I, 1921 et t. II, 1927 (je désignerai ces livres par CHI et CHII).

Ces livres simplifient ma tâche, car je n'ai pas à redire ce qu'ils disent si bien.

## CHAPITRE I.

### LE PROBLÈME DES TRAJECTOIRES.

Une table de tir est un ensemble de données numériques, permettant d'utiliser un canon. Elle donne, d'abord, pour un certain angle de projection, une trajectoire-étalon, correspondant à des conditions bien fixées. Elle donne, ensuite, le moyen de faire des *corrections*, pour des circonstances de tir nouvelles, telles que variation de température, effet du vent, etc.

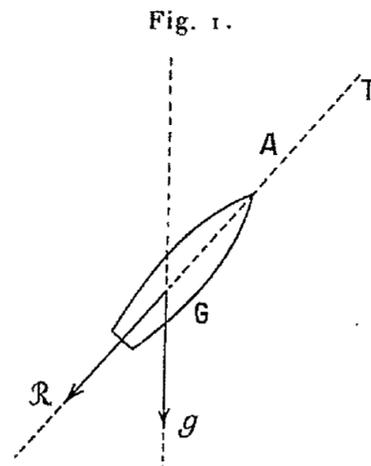
On nomme trajectoire le lieu des positions du centre de gravité du projectile.

La Balistique suppose l'existence, pour chaque projectile, d'un *coefficient balistique*. Cette notion n'est pas très nette, en raison de notre ignorance au sujet de la mécanique des fluides. Voici ce que l'on peut dire. L'obus est supposé couché sur sa trajectoire; son axe GA coïncide avec la tangente GT à la trajectoire; G désignant le centre de gravité. Par raison de symétrie, on admet que la résistance de l'air est une force unique  $m\mathcal{R}$  portée par la tangente, et en sens contraire du mouvement;  $m$  est la masse et  $\mathcal{R}$  l'accélération est nommée retardation tangentielle.

La retardation est le produit de deux facteurs :

$$\mathcal{R} = cF(v),$$

le premier  $c$  caractérise le projectile; le second est une fonction de la vitesse  $v$  du centre de gravité. Les mesures, qui fournissent la loi de



résistance  $F(v)$  sont extrêmement délicates. Et le coefficient balistique a pour expression

$$c = i \frac{a^2}{p} \Delta_0 \times \frac{\Delta_y}{\Delta_0},$$

$a$  est le diamètre, exprimé en mètres;  $p$  est le poids, en kilogrammes;  $\Delta_0$  est le poids du mètre cube d'air, dans des conditions normales, définies, au niveau du sol;  $\Delta_y$  est le poids du mètre cube d'air (dans les conditions normales de variation de la température et de la pression), à l'altitude  $y$  au-dessus du sol;  $i$  est l'indice de forme.

Pour une trajectoire, dont la flèche est très petite, on peut négliger l'influence de l'altitude, le rapport  $\Delta_y : \Delta_0$ ; et l'on prend donc le coefficient balistique *constant*

$$c_0 = i \frac{a^2}{p} \Delta_0.$$

Par opposition, on peut nommer  $c$  coefficient balistique *d'altitude*

$$c = c_0 \frac{\Delta_y}{\Delta_0}.$$

La valeur numérique de  $c_0$  sera demandée à l'expérience, de sorte qu'il ne faut pas attacher grande importance à l'expression mathématique de  $c_0$ , approximation probablement assez grossière.

Le premier problème balistique est donc posé ainsi :

Mouvement d'un point matériel, soumis à deux accélérations, la retardation  $\mathcal{R}$ , et l'accélération de la pesanteur  $g$ . Nous supposons le vecteur  $g$  constant, la Terre plate et immobile, l'absence de tout vent, et une loi moyenne de référence pour la variation du poids spécifique  $\Delta_\gamma$ .

C'est une *première approximation*.

Quand ce problème sera résolu, nous aurons, pour un angle de projection  $\alpha$ , une vitesse initiale  $v_0$ , un coefficient  $c_0$ , une certaine portée  $X$ , et une durée de trajet  $T$ . La valeur numérique de  $c_0$  nous sera donnée par la comparaison de la valeur  $X$  *calculée* et du nombre  $X$  *observé*, ou, aussi bien, par la comparaison de la valeur  $T$  *calculée* et du nombre  $T$  *mesuré*.

Il est clair que le coefficient balistique ne correspond à quelque réalité que si l'on obtient la même valeur, en partant de  $X$ , ou de  $T$ , ou de tout autre élément mesurable avec une grande précision.

La détermination des valeurs numériques de la loi de résistance  $F(v)$ , et la représentation analytique de cette fonction sont des questions difficiles, dont l'étude réclame surtout le concours des physiciens. Citons les mesures très précises de M. Dupuis, et les travaux de MM. Vessiot, Darrieus, Jouguet, Lamothe, Paul, Langevin, Maurice Roy, etc.

On trouvera une bibliographie détaillée dans une belle Note de M. Maurice Roy [29].

**La fonction de résistance et le degré de résistance.** — E. Mach, le premier, a saisi, par la photographie, les ondes et tourbillons qui entourent un projectile. On peut dire que le projectile dépense son énergie à produire des ondes, à faire naître des tourbillons. Il en résulte que le symbole :  $R = m\mathcal{R}$  représente une force fictive, synthétisant artificiellement des effets nombreux et variés. M. Painlevé est arrivé à cette conclusion, d'après les expériences les plus récentes sur les mouvements des filets fluides autour d'un solide : « Il n'y a aucun espoir, dit-il, de trouver une loi élémentaire de la résistance de l'air » [20].

Le symbole  $F(v)$  n'a un sens précis que s'il résulte d'expériences très soignées. Il est commode, et parfois nécessaire, d'avoir une bonne *formule empirique*, pour représenter  $F(v)$ .

On peut représenter, approximativement,  $F(v)$  par  $b v^n$ .

Dans un intervalle  $(v_1, v_2)$ , on aura une valeur  $b_1$ , à peu près constante, avec un exposant  $n_1$ , qui n'est pas nécessairement un nombre entier.

Pour des vitesses assez grandes :  $v > 350$  ou  $400$  m/s, Vallier et Chapel ont donné une formule approchée :  $a(v - b)$ .

Les formules empiriques sont nombreuses, mais je ne puis insister sur ces questions.

La fonction  $F(v)$  joue un tel rôle, qu'il n'est pas superflu d'en préciser la définition. On peut dire que  $F(0) = 0$ , et que  $F(v)$  *crott* avec  $v$ . Si nous ajoutons que  $F(v)$  devient *infini* avec  $v$ , assurément cela paraît naturel, mais cela dépasse le cadre des faits d'expérience.

On peut admettre également l'existence de la dérivée  $F'(v)$ .

La valeur initiale  $F'(0)$  doit être assez petite, sinon nulle.

Il faut avouer que nous ne sommes pas très renseignés sur les dérivées :  $F'(v)$ ,  $F''(v)$ , . . . .

On peut dire, cependant, que la dérivée  $F'(v)$  varie régulièrement, sauf lorsque la valeur de  $v$  se rapproche de la vitesse du son dans l'air,  $340$  m/s. Il existe des Tables numériques, donnant approximativement la valeur de  $F'(v)$ , entre autres, celle du général Cavalli [36].

Avec une table de  $F'(v)$ , on peut établir une table donnant le nombre

$$n = v \frac{F'(v)}{F(v)}$$

Ce nombre  $n(v)$ , nommé « degré de résistance », joue un rôle, et il est nécessaire de l'avoir sous la main.

**Variation de la densité de l'air avec l'altitude.** — Pour saisir l'importance de la notion de coefficient balistique d'altitude, il faut voir comment varie le poids du mètre cube d'air, d'après les données expérimentales et théoriques. Cranz donne les chiffres suivants :

Altitude.	
m	
0.....	1245 <sup>g</sup>
2000.....	1012
6000.....	652
10000.....	404
14000.....	228
18000.....	122
20500.....	84

Voici, d'autre part, les chiffres qui m'ont été fournis par M. C. E. Brazier, de l'Institut de Physique du Globe :

Altitude.	Été.	Hiver.
km	<sup>g</sup>	<sup>g</sup>
20.....	93,2	86,2
25.....	43,3	39,3
30.....	20,1	17,9
35.....	9,8	8,2
40.....	4,4	3,8

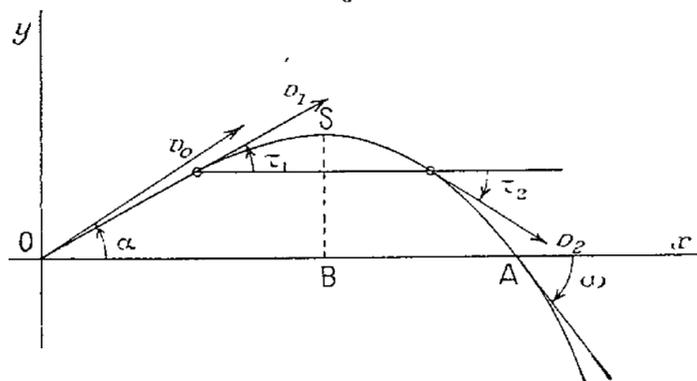
Les variations de  $\Delta_y$  et de  $c$  sont telles, lorsque la flèche est grande, qu'il serait imprudent de calculer d'abord la trajectoire, en prenant  $c = c_0$ , et en faisant ensuite une correction.

Une *correction* doit représenter un « effet secondaire », *minime* par rapport à un « effet principal » calculé intérieurement.

Les variations de  $\Delta_y$  ont également une très grande importance dans l'étude du « second problème balistique » (dernier Chapitre).

**Les équations d'une trajectoire.** — Fixons les notations. Nous prenons un axe horizontal  $Ox$  et un axe  $Oy$  vertical, vers le haut. Soit  $g$

Fig. 2.



l'accélération de la pesanteur qui, dans un *domaine assez restreint*, peut être regardée comme un vecteur constant. De même, dans un *domaine assez restreint*, il est inutile de tenir compte de la courbure de la Terre. Soient  $O$  l'origine du tir,  $OSA$  la trajectoire; soient  $s$  l'arc de trajectoire,  $t$  le temps,  $v$  la vitesse du centre de gravité,  $u$  sa composante horizontale. Soit  $\tau$  la mesure de l'angle de la tangente avec  $Ox$ ;  $\tau_0 = \alpha$  angle de projection, et  $\omega$  est l'angle de chute.  $OA = X$  est la portée des tables.

$S(\tau = 0)$  est le sommet,  $SB$  est la flèche.

T désigne la durée du trajet correspondant à l'arc OSA,  $\rho$  représente la valeur absolue du rayon de courbure,  $v_0$  représente la vitesse initiale. Sur l'arc OS, on a :  $\tau > 0$ , et, après le sommet, on a :  $\tau < 0$ .

On a toujours :  $d\tau < 0$ .

Les équations de la Balistique extérieure sont les suivantes :

$$(1) \quad \frac{dv}{dt} = -g \sin \tau - \mathcal{R}.$$

$$(2) \quad \frac{v^2}{\rho} = g \cos \tau.$$

ou bien encore :

$$(3) \quad dt = -\frac{v}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau}, \quad dx = -\frac{v^2}{g} d\tau, \quad dy = \tan \tau dx,$$

avec l'équation de l'hodographe, qui peut être mise sous l'une des formes ci-dessous :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} du = v \frac{\mathcal{R}}{g} d\tau, \quad \frac{du}{u} = \frac{\mathcal{R}}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau}, \\ \frac{dv}{v} = \left( \sin \tau + \frac{\mathcal{R}}{g} \right) \frac{d\tau}{\cos \tau}, \quad v dv = -g dy - \mathcal{R} ds. \end{array} \right.$$

L'équation de l'hodographe est équivalente à l'équation différentielle des forces vives.

Aux équations (3), on peut ajouter l'expression de  $ds$  :

$$ds = v dt = -\frac{v^2}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau}.$$

Si l'on fait abstraction de la résistance de l'air, on a ce que l'on nomme la *trajectoire du vide* ; c'est la parabole connue :

$$(I) \quad y = x \tan \alpha - g \frac{x^2}{2u_0^2},$$

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = u_0 = v_0 \cos \alpha = \text{const.}, \\ v = \frac{u_0}{\cos \tau}, \quad t = \frac{x}{u_0}, \end{array} \right.$$

$$(III) \quad X = v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{g}, \quad T = 2v_0 \frac{\sin \alpha}{g}.$$

**Caractères élémentaires d'une trajectoire.** — Les variations de la vitesse, sur une trajectoire, dépendent de la loi de variation de la

densité de l'air avec l'altitude. On pourrait avoir, dans certaines conditions atmosphériques :  $r = \text{const.}$  sur la branche descendante [18].

Sur la branche ascendante, on démontre aisément, en se servant de l'intégrale  $\int \frac{dv}{v}$ , que  $v$  ne peut s'annuler. Sur la branche *descendante*, en se servant du théorème des forces vives, sous forme finie, on démontre ceci :  $r$  ne peut devenir infini ;  $v$  ne peut devenir nul à distance finie. On aurait

$$\lim v = 0 \quad \text{pour} \quad y = -\infty.$$

si l'on faisait l'hypothèse

$$\lim \Delta y = \infty \quad \text{pour} \quad y = -\infty.$$

Mais, cette hypothèse, comme l'hypothèse

$$\vec{g} = \text{const. dans un champ infini,}$$

est dépourvue de sens physique. Si l'on ne craint pas les extensions purement mathématiques, on ajoutera que, sur la branche descendante, une asymptote oblique est impossible, et qu'il existe une asymptote verticale.

Le colonel de Saint-Robert a fait une étude générale des trajectoires, qui contenait des résultats nouveaux, à cette époque (1855). Supposant le coefficient balistique *constant*, il prolonge la trajectoire dans les deux sens. Si, à partir de l'origine, nous remontons en amont,  $v$  croît sans cesse et devient infini ; soit  $\Omega$  le point de la trajectoire correspondant à  $v$  infini. Saint-Robert a démontré que la tangente au point  $\Omega$  fait avec  $Ox$  un angle  $\neq \frac{\pi}{2}$ .

Il distingue deux cas :  $\Omega$  est à distance finie, ou infinie.

Le temps (négatif), qui correspond à  $\Omega$ , peut être fini, ou non.

Ces questions ont été étudiées par M. l'Ingénieur général Charbonnier, aussi bien pour le cas du coefficient balistique constant et pour le cas du coefficient balistique d'altitude. M. Charbonnier a reconnu l'existence de certaines trajectoires *dépourvues de sommet* [14].

Il faut retenir les théorèmes généraux, attribués (avec quelque exagération) à Saint-Robert, tels que ceux-ci :

$$OB > BA \quad (\text{voir fig. 2}).$$

Si l'on prend deux points de même altitude, sur les branches ascendante et descendante (voir *fig. 2*), on aura

$$v_1 > v_2, \quad |\tau_2| > \tau_1, \quad |\omega| > \alpha, \quad \dots$$

Les variations de la vitesse, sur une trajectoire déterminée, sont intéressantes. Supposons le coefficient balistique variable avec l'altitude, seul cas intéressant. On peut avoir, après le sommet, un point de vitesse *minimum*. M. Charbonnier [13] a signalé la possibilité, plus loin, de l'existence d'un point de vitesse *maximum*. On trouve des exemples intéressants [16 et 17] dans les calculs de trajectoires de M. de Sparre. Enfin, M. Esclangon [15] a montré que, sur certaines trajectoires,  $v$  est toujours *décroissant*.

Dans un Mémoire récent [19], M. A. Stoyanoff a étudié les conditions d'existence du point de vitesse minimum, mais seulement dans le cas théorique d'un milieu de densité constante. M. Charbonnier a écrit une préface, pour ce Mémoire, qui contient tous les renseignements bibliographiques.

## CHAPITRE II.

### CLASSIFICATIONS GÉNÉRALES.

On a fait des recherches variées, en vue d'une solution exacte des problèmes de la Balistique. Supposons d'abord le coefficient balistique constant; l'équation de l'hodographe sera une équation différentielle en  $v$  et  $\tau$ .

J. d'Alembert a découvert que l'équation de l'hodographe est intégrable par des quadratures, si l'on a

$$\mathcal{R} = b_0 + b_n v^n, \quad \mathcal{R} = b_0 + b \log v, \quad \dots$$

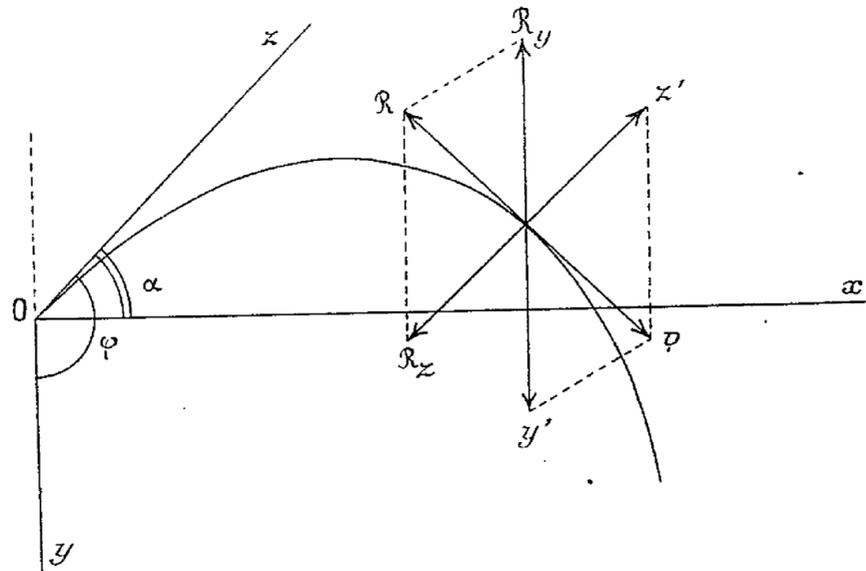
(les  $b$  sont des coefficients constants).

Le colonel Siacci a trouvé des solutions nouvelles [32].

Enfin, M. Drach a obtenu toutes les formes de  $\mathcal{R}$ , telles que l'équation de l'hodographe soit intégrable par des quadratures. M. Denjoy a complété cette étude de M. Drach et en a fait un exposé (CH. I, p. 481). Le travail de M. Drach est, au point de vue analytique, extrêmement remarquable [34].

Une découverte très connue est celle de Greenhill [33]. Si nous prenons :  $\mathcal{R} = bc^3$ , Greenhill a obtenu tous les éléments de la trajectoire par l'emploi des fonctions elliptiques, mais dans ses formules, les termes réels ne sont pas séparés des termes complexes. M. de Sparre est arrivé, par une analyse savante, à extraire les termes réels, mais cette théorie compliquée ne paraît guère utilisable [35].

Fig. 3.



Supposons le coefficient balistique variable avec l'altitude. M. K. Popoff a fait un travail remarquable [40].

Nous prenons des axes obliques.  $Oy$  vertical, vers le bas ;  $Oz$  coïncide avec la tangente à l'origine.

L'angle des axes est

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Soient  $y'$  et  $z'$  les dérivées par rapport à  $t$ , on a le système différentiel

$$\frac{dy'}{dt} = g - y' \frac{\mathcal{R}}{v}, \quad \frac{dz'}{dt} = -z' \frac{\mathcal{R}}{v}$$

avec

$$\mathcal{R} = c_0 F(v) e^{-kh}.$$

$h$  désignant l'altitude, on peut assez bien représenter le rapport  $\frac{\Delta h}{\Delta_0}$  par  $e^{-kh}$ ,

$$k = \frac{1}{10.000}, \quad h = z \sin \alpha - y.$$

Nous savons que l'on a

$$v > 0, \quad w \equiv y' + z' = 0.$$

$$v^2 = (y' + z')^2 - 4y'z' \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Il en résulte que  $v$  est développable en série de puissances entières et positives de  $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ .

M. Popoff suppose que l'on a

$$f(v) \equiv \frac{F(v)}{v} = \sum_0^{\infty} A_n v^n.$$

Alors  $f(v)$  sera développable en série de puissances entières et positives de  $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ , ce qui permet à M. Popoff d'utiliser une théorie de Henri Poincaré. Quand un système différentiel contient un paramètre  $\lambda$ , certaines conditions restrictives étant satisfaites, Poincaré a démontré que les solutions sont des *fonctions holomorphes* de  $\lambda$ .

En outre, Poincaré a créé une méthode d'intégration, dont le travail de M. Popoff est une magnifique application.

On intègre d'abord le système

$$\frac{dy'}{dt} = g - y'f(w), \quad \frac{dz'}{dt} = -z'f(w),$$

ce qui donnera la *solution intermédiaire*  $y_0(t), z_0(t)$ .

Ensuite, par une *méthode de variation*, on calcule les coefficients  $y_1(t), z_1(t)$  de  $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ , dans la solution complète. De même, on calcule les coefficients  $y_2, z_2$  de  $\sin^4 \frac{\varphi}{2}$ . Et finalement, on a, pour  $y$  et  $z$ , des développements convergents, avec le paramètre  $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ .

Cette méthode de variation permet de tenir compte de la variation de l'*altitude* et de la variation de la *gravité*. Les valeurs numériques de  $F'(v), F''(v), \dots$  étant inconnues, c'est un *théorème d'existence* que donne M. Popoff, un beau théorème d'existence. Néanmoins, en ne conservant que les premiers termes, M. Popoff propose une méthode d'approximation, voisine de celle de Siacci. M. K. Popoff a écrit plusieurs Mémoires, qui constituent une classification théorique des trajectoires. Ces belles études des courbes

réelles, définies par un système différentiel, ont une grande valeur et doivent être rapprochées des mémorables travaux de Poincaré, de Picard et de M. Dulac.

Il faut signaler le théorème suivant, établi par M. Popoff : On peut toujours développer les intégrales des équations du mouvement, en employant une variable auxiliaire  $\theta$ , fonction croissante du temps  $t$ . On aura des séries de puissances entières positives de  $\theta$ , qui convergent si l'on a  $|\theta| < 1$ , c'est-à-dire pour toutes les valeurs réelles de  $t$  comprises entre  $-T$  et  $+\infty$ ,  $T$  étant arbitrairement choisi.

Les séries s'introduisent naturellement, dans les théories, mais l'étude de leur convergence est souvent très difficile, et, en outre, la convergence ne suffit pas, au point de vue du calcul numérique. Si la convergence n'est pas rapide, tout calcul est impossible. M. Charbonnier, dans son *Traité* (t. II, p. 224), nous renseigne sur les travaux relatifs à la recherche de l'équation de la trajectoire sous la forme d'une série :

$$y = \sum a_n x^n,$$

la retardation étant représentée par  $b_n v^n$  (coefficient balistique constant). Ce sont, principalement, les travaux de Lambert, von Tempelhof, Français, Otto, Demogue.

On trouve, dans le *Traité* de M. Charbonnier (t. I, p. 471), des indications sur les transformations effectuées pour mettre les équations de la balistique sous une forme dite « normale », qui permet de reconnaître la nature analytique des équations différentielles. Il faut citer, à ce sujet, MM. Appell, Ouivet, Jacob, Esclangon, Cranz, Platrier, etc.

Il faut nommer encore les auteurs qui ont voulu intégrer les équations différentielles, en tenant compte du coefficient balistique d'altitude, et en faisant des hypothèses simples sur la forme analytique de la loi de variation de la densité de l'air, en fonction de l'altitude : citons, entre autres : Legendre, général Cavalli, général de Stefano.

Je mentionne, également, les intéressants travaux de M. Signorini [38].

Ces brèves indications montrent quels efforts ont été faits pour faire progresser la balistique extérieure, au point de vue de l'analyse mathématique plutôt qu'au point de vue de l'application.

En particulier, lorsqu'on prend un coefficient balistique constant,

ou bien une loi de résistance

$$\mathcal{R} = b_n v^n \quad (n \text{ const. et } b_n \text{ const.}),$$

l'application de la théorie n'est possible que sur un *arc partiel* de la trajectoire, soit à cause de la variation de l'altitude, soit parce que l'indice  $n$  varie avec la vitesse  $v$ .

Faut-il rappeler ici cette banalité que le balisticien a devant lui des problèmes de mécanique technique, et que son point de vue n'est pas toujours celui du mathématicien?

Le mathématicien désire, avant tout, une extrême *précision*, une grande *généralité*, une lumière très pénétrante, avec l'emploi de *moyens normaux*, c'est-à-dire en harmonie avec les résultats. S'il obtient tout cela, il est remué par une émotion esthétique incomparable. Mais le balisticien ne saurait avoir les mêmes exigences essentielles, car, pour lui, le but primordial consiste dans la *possibilité* du calcul numérique et dans la *concordance* de l'image théorique avec les faits.

Pour donner un exemple, supposons une question de balistique résolue par les trois premiers termes d'une série, avec une approximation connue. Si la limite supérieure de l'erreur a été bien étudiée, et si l'approximation est suffisante pour l'usage pratique, la convergence de toute la série pourra, pour le balisticien, être sans intérêt. Mais il faut que la nature de l'approximation soit bien connue, d'après la totalité des éléments qui entrent en jeu.

Et l'étude de ces approximations est souvent très difficile.

### CHAPITRE III.

EULER.

Assurément, une étude complète ne saurait omettre les travaux de Galilée, Huygens, Newton : ces illustres créateurs de la dynamique se sont intéressés au problème qui nous occupe. Mais, dans une étude rapide, il faut négliger les précurseurs et prendre, comme point de départ, Euler, car nous devons à Euler le principe de la construction des Tables numériques (CH. II, p. 26). Les remar-

quables études d'Euler supposent la résistance « monome »

$$R = b_n v^n;$$

$b_n$  étant une constante, on suppose le coefficient balistique *constant*: il en résulte des propriétés de la trajectoire, que je rappelle. Ou bien la vitesse décroît toujours, sur la branche descendante, et a une limite  $v'$ : ou bien  $v$  a un minimum, puis croît jusqu'à la limite  $v'$ . Cette limite est donnée par la relation

$$cF(v') = g.$$

Cette limite  $v'$  correspond à une asymptote verticale à distance finie. Si, à partir de l'origine, on remonte en amont, on trouve un point  $\Omega$ , où  $v$  est infini, et où la tangente n'est pas verticale. Pour  $n = 1$ , ce point  $\Omega$  est l'extrémité d'une branche parabolique. Pour  $n = 2$ , on a une branche hyperbolique. Pour  $n > 2$ , le point  $\Omega$  est à distance finie. Le prolongement à l'infini de la trajectoire ne correspond à aucune réalité physique, mais c'est un *langage commode*.

Quand on a

$$R = b_n v^n,$$

l'équation de l'hodographe donne immédiatement

$$\frac{g}{nb_n v^n} - \xi_n \tau = Q,$$

$Q$  est une constante, connue si l'on donne  $v_0$ ,  $\alpha$ ,  $b_n$ ;  $\xi_n \tau$  est un intégrale  $\int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}$ , et la trajectoire est donnée par les formules

$$\begin{aligned} N^{\frac{1}{n}} v &= (Q - \xi_n \tau)^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{\cos \tau}, \\ \left( N &= \frac{nb_n}{g} \right) \end{aligned}$$

( $g$  est l'accélération de la pesanteur):

$$\begin{aligned} N^{\frac{1}{n}} g t &= - \int_x^\tau (Q - \xi_n \tau)^{-\frac{1}{n}} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}, \\ N^{\frac{2}{n}} g x &= - \int_\alpha^\tau (Q - \xi_n \tau)^{-\frac{2}{n}} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}, \\ N^{\frac{2}{n}} g y &= - \int_x^\tau (Q - \xi_n \tau)^{-\frac{2}{n}} \tan \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}. \end{aligned}$$

On calcule ces intégrales, pour une valeur donnée de  $Q$ , et l'on obtient une table numérique donnant des branches ascendante et descendante de la trajectoire, avec une valeur arbitraire de  $b_n$ . Il sera facile de passer au cas où  $b_n$  a une valeur donnée.

On trouve, dans le Traité de M. Charbonnier, des renseignements sur la Méthode d'Euler, et sur la disposition des tables de tir anciennes.

Bashforth a construit des tables pour  $n = 3$ , et Zabudski pour  $n = 4$ , au moyen des quadratures ci-dessus.

Un cas particulier a retenu l'attention d'Euler et de ses disciples directs, von Graewenitz et Otto; c'est la résistance *quadratique*  $n = 2$ .

Dans ce cas, l'arc  $s$  est exprimé simplement en fonction de  $\xi\tau$  ou  $\xi_2\tau$ . quadratures mises en tables: on a

$$2bs = - \int_{\alpha}^{\xi\tau} \frac{d\xi\tau}{Q - \xi\tau} = \text{Log} \frac{Q - \xi\tau}{Q - \xi\alpha}.$$

Et pour éviter le calcul des quadratures donnant  $x, y, t$ , Euler propose une méthode d'approximation, qui est la méthode des *arcs successifs*, de capitale importance. La trajectoire, à partir de son origine, est divisée en arcs, correspondant à des inclinaisons:  $\alpha, \dots, \tau_i, \dots, \tau_j, \dots, \omega$ . L'écart  $\tau_0 - \tau_1$  étant assez petit, et l'arc  $s$  qui lui correspond ayant été calculé, Euler passe *immédiatement* aux valeurs des abscisses et des ordonnées par ces approximations:

$$x_1 - x_0 = s \cos \frac{\tau_0 + \tau_1}{2},$$

$$y_1 - y_0 = s \sin \frac{\tau_0 + \tau_1}{2}.$$

Euler admettait cette approximation comme suffisante, en prenant toujours:  $\tau_0 - \tau_1 < 5^\circ$ .

Nous verrons combien fut considérable le développement de cette méthode des arcs successifs.

Les tables d'Otto ont été modifiées par Siacci et par Braccialini; celles de Graewenitz ont été transformées par Lardillon; toutes ces tables sont encore utilisables pour les vitesses faibles.

La théorie d'Euler a été l'origine de travaux extrêmement importants.

## CHAPITRE IV.

JEAN BERNOULLI. DIDION.

Jean Bernoulli, en 1719, avant Euler, a obtenu les éléments de la trajectoire, pour  $\mathcal{R} = b_n v^n$  (coefficient balistique constant), par une approximation un peu rude, sous la forme suivante: les éléments sont ceux de la parabole du vide, corrigés :

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} G, \quad t = \frac{x}{u_0} G_2,$$

$$\operatorname{tang} \tau = \operatorname{tang} \alpha - \frac{g x}{v_0^2 \cos^2 \alpha} G_1, \quad v = \frac{u_0}{\cos \tau} G_3,$$

Les facteurs  $G, G_1, G_2, G_3$  sont nommés « facteurs de la trajectoire » ou « fonctions modificatrices ». Cette conception est féconde, et nous trouvons une solution de ce genre dans les mémorables travaux du général Didion. Didion prenait la forme

$$\mathcal{R} = b_2 v^2 + b_3 v^3;$$

telle était la loi de résistance obtenue par la Commission de Metz (général Piobert, Morin, Didion), en 1840, pour les vitesses usuelles, à cette époque.

Didion écrit l'équation de la composante horizontale des forces

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\mathcal{R} \frac{dx}{ds},$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2c} v^2 \left( 1 + \frac{v}{r} \right) \quad (\text{notation de Didion}).$$

On a

$$v = \frac{ds}{dx} \frac{dx}{dt} = x u,$$

en posant

$$\frac{ds}{dx} = x.$$

L'artifice de Didion consiste en un sectionnement de la trajectoire, tel que, sur un arc partiel, on ait

$$\alpha = \text{const. approximativement.}$$

On a alors

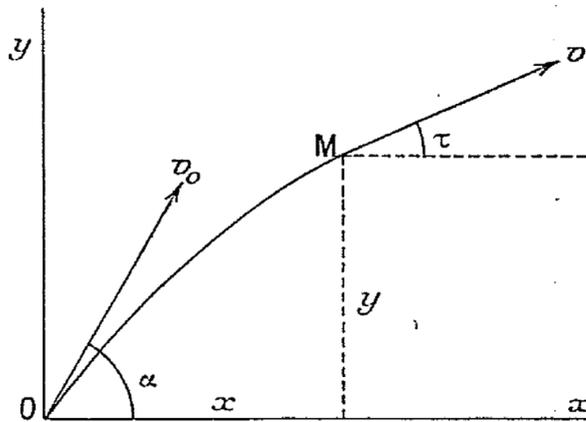
$$\frac{du}{dt} = -\frac{z}{2c} u^2 \left( 1 + \frac{zu}{r} \right),$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dt},$$

$x$  et  $t$  sont donnés par des quadratures [48].

Quoique Didion n'ait pas adopté la loi de résistance quadratique ( $bu^2$ ), néanmoins ce cas particulier a une telle importance que

Fig. 4.



Didion a écrit un Chapitre (2<sup>e</sup> édition, p. 200 à 251) [48], sur la résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

Il rappelle qu'Euler détermine approximativement  $x_1 - x_0$  et  $y_1 - y_0$ , en supposant l'arc partiel calculé  $s$  porté par une *droite*.

Et il propose de placer l'arc  $s$  sur la *parabole du vide*.

Rappelons les formules relatives à cette parabole :

$$s = \frac{u_0^2}{g} (\xi z - \xi \tau),$$

$$x = \frac{u_0^2}{g} (\text{tang} z - \text{tang} \tau),$$

$$y = \frac{u_0^2}{2g} (\text{tang}^2 z - \text{tang}^2 \tau),$$

$$\xi \tau = \xi_2 \tau = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}.$$

Telles sont les formules qui sont proposées par Didion, sur un arc partiel.

Dans les rapports  $\frac{x}{s}$  et  $\frac{y}{s}$ , on voit que la valeur de  $u_0$  n'intervient pas. Pour obtenir des formules maniables. Euler, Legendre, Didion

choisissent. *a priori*, les rapports  $\frac{x}{s}$  et  $\frac{y}{s}$ . Il est donc bien difficile de savoir laquelle de ces approximations est la meilleure.

La contribution de Didion, dans la balistique quadratique, a moins d'importance que l'*artifice* célèbre, mentionné ci-dessus, et qui consiste, lorsque  $\cos\tau$  varie très peu, sur une trajectoire, à lui substituer une valeur moyenne, dans certains termes des équations. Prenons, par exemple, l'équation de l'hodographe, sans nous inquiéter de la forme particulière que prenait Didion, pour la loi  $F(v)$  :

$$du = v \frac{cF(v)}{g} d\tau, \quad (c \text{ constant}).$$

Dans le cas du tir de plein fouet,  $\cos\tau$  varie très peu, et l'on a,  $\alpha$  étant une *constante*,  $\alpha \cos\tau \sim 1$ . Il en résulte

$$F(v) \sim \frac{F(\alpha \cos\tau v)}{\alpha \cos\tau}.$$

On a donc

$$\alpha \frac{g}{c} \frac{d(\alpha u)}{\alpha u F(\alpha u)} \sim \frac{d\tau}{\cos^2\tau},$$

et les variables sont séparées. Cette méthode de Didion est le pré-lude de celle de Siacci.

## CHAPITRE V.

BORDA. SIACCI. CHARBONNIER.

Nous allons maintenant étudier exclusivement le tir de plein fouet, que nous définissons géométriquement : trajectoires pour lesquelles l'angle  $\tau$  reste assez petit, par exemple, moindre que  $10^\circ$  ou  $12^\circ$  environ;  $\tau$  étant étroitement limité, certaines approximations sont permises, qui, dans le cas général, seraient ridicules. Le grand précurseur, dans cette théorie, est Borda (CH. II, p. 137). Rappelons les formules générales :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} dt = -\frac{u}{g} d \tan \tau, \\ dx = -\frac{u^2}{g} d \tan \tau, \\ dy = -\frac{u^2}{g} \tan \tau d \tan \tau, \end{array} \right.$$

et les formules de la théorie d'Euler, pour  $\mathcal{R} = b\rho^2$ ,

$$(2) \quad \begin{cases} Q = \frac{g}{2bu^2} + \xi\tau, \\ \xi\tau \equiv \xi_2\tau = \int_0^\tau \frac{1}{\cos\tau} d \operatorname{tang}\tau. \end{cases}$$

Telle est l'intégrale que Borda modifie.

Première altération : il remplace  $\frac{1}{\cos\tau}$  par  $\frac{1}{\cos\alpha} = \text{const.}$

Deuxième altération : il remplace  $\frac{1}{\cos\tau}$  par  $a_0 + a_1 \operatorname{tang}\tau$ ,

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}.$$

Dans les deux cas,  $x$  et  $y$  sont obtenus par des quadratures.

On reconnaît, en lisant les travaux de M. Charbonnier, combien fut grande l'influence de Borda.

Si Borda est un grand précurseur, les travaux du colonel Siacci représentent la pleine floraison de cette théorie. Nous devons faire une remarque. Bernoulli, Euler, Didion emploient des formes particulières de la loi de résistance, telles que  $b_n v^n$  : c'est une altération de la loi réelle, car  $b_n$  varie avec  $v$ .

Siacci, au contraire, ne fait aucune hypothèse sur la forme analytique de  $F(v)$ .

Mais nous verrons quelle est la rançon de cette généralité ; Siacci est obligé d'*altérer* la vitesse  $v$ .

L'équation exacte de l'hodographe étant

$$(3) \quad \frac{g}{c \cos\tau} \frac{du}{u F\left(\frac{u}{\cos\tau}\right)} = \frac{d\tau}{\cos^2\tau},$$

Siacci lui substitue artificiellement celle-ci :

$$(4) \quad \frac{g}{c\lambda} \frac{du}{u F\left(\frac{u}{\mu}\right)} = \frac{d\tau}{\cos^2\tau}.$$

Première altération :  $\lambda = \mu = \cos\alpha$  ;

Deuxième altération :  $\lambda = \mu^2 = \cos^2\alpha$  ;

Troisième altération :  $\mu = \cos\alpha$ ,  $\lambda = \beta \cos^2\alpha$ .

Cette classification a été établie par M. Charbonnier.

Prenons pour variable

$$w = \frac{u}{\mu},$$

l'équation (4) prend la forme

$$(5) \quad d \operatorname{tang} \tau = \frac{g}{c \lambda} \frac{dw}{w F(w)},$$

ce qui donne

$$(6) \quad \operatorname{tang} \tau - \operatorname{tang} z = \frac{J_0 - J}{c \lambda},$$

en posant

$$J = - \int_W^w g \frac{dw}{w F(w)} \quad \text{et} \quad J_0 = J(w_0),$$

$W$  est une constante.

Les équations (1) donnent

$$(7) \quad dx = - \frac{\mu^2 w^2}{g} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}, \quad dt = - \frac{\mu w}{g} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau},$$

$$x = \frac{\mu^2}{c \lambda} (D - D_0),$$

$$(8) \quad t = \frac{\mu}{c \lambda} (S - S_0),$$

en posant

$$D = - \int_W^w \frac{w dw}{F(w)}, \quad S = - \int_W^w \frac{dw}{F(w)}.$$

Enfin, on a

$$(9) \quad dy = \operatorname{tang} \tau dx = \left( \operatorname{tang} z + \frac{J_0 - J}{c \lambda} \right) dx,$$

$$y = x \left( \operatorname{tang} z + \frac{J_0}{c \lambda} \right) - \frac{\mu^2}{c^2 \lambda^2} (A - A_0),$$

en posant

$$A = - \int_W^w \frac{J(w)}{F(w)} w dw.$$

Telle est la découverte de Siacci : la trajectoire de plein fouet peut être calculée, quand on a dressé des tables des quatre intégrales  $J$ ,  $D$ ,  $S$ ,  $A$ . C'est une approximation, dont la nature dépend du choix de  $\lambda$  et  $\mu$ ,  $c$  étant regardé comme constant.

Lorsque l'on veut tenir compte de l'altitude,  $c$  n'est pas constant, mais on a

$$c = c_0 e^{-hy}.$$

$$h = \frac{1}{10000} \quad \text{ou} \quad \frac{1.1}{10000} \quad \text{approximativement,}$$

ou quelque autre formule analogue.

Pour tenir compte du coefficient balistique d'altitude et de l'altération introduite dans l'équation de l'hodographe, Siacci a mis en jeu son célèbre coefficient  $\beta$ . Il a cherché à calculer  $\beta$  en fonction de  $\alpha$ , angle de projection, et de  $X$  portée, et il a donné une table de valeurs de  $\beta$ ,  $\alpha$  variant jusqu'à  $60^\circ$ , ce qui est un peu paradoxal (CH. II, p. 671).

Ce coefficient  $\beta$  est un terme de compensation, d'une telle complexité que le maniement en est délicat.

Siacci a été un peu exclusif, en affirmant que la solution *complète* et *exacte* du problème des trajectoires sera obtenue par l'emploi du coefficient  $\beta$ , et, en outre, que  $\beta$  doit être représenté par une série de puissances entières de  $c_0$ .

Les symboles  $c_0$  et  $\beta$  correspondent à des notions un peu confuses, de sorte qu'il est téméraire de les rapprocher si étroitement.

On peut discuter l'efficacité du coefficient  $\beta$  comme méthode *générale*. On doit reconnaître, dans les travaux de Siacci, l'influence très nette de ceux de Didion. Mais les quatre fonctions de Siacci sont, incontestablement, une très belle *découverte*. Les travaux de Siacci sont mis en pleine lumière dans le Traité de M. Charbonnier.

Le commandant Batailler a tiré le meilleur parti des idées de Siacci et a fait d'utiles applications.

Le général Emery a repris toute la théorie, de la manière la plus large [60].

MM. Cavalli et Bianchi ont perfectionné les travaux de Siacci. Des extensions sont possibles : l'altération de l'hodographe [équations (3) et (4)], conçue, à l'origine, pour les trajectoires de plein fouet, est encore applicable, *mutatis mutandis*, dans les conditions suivantes :

1° Tir courbe, sur un arc limité, de sorte que la variation de  $\tau$  ne dépasse pas  $15^\circ$  ou  $20^\circ$ ;

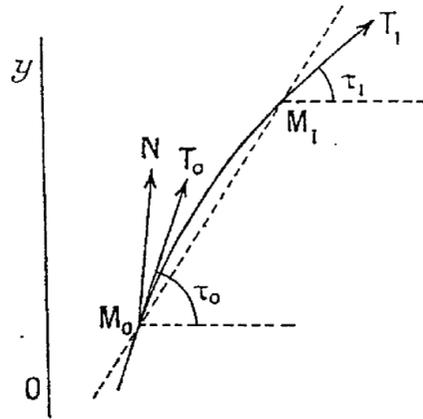
2° Tir très tendu, quel que soit l'angle de projection, puisque  $\tau$  varie peu.

Le coefficient  $\mu$  devra être choisi de manière que la vitesse altérée  $\omega$  soit une composante de  $v$ , suivant une direction  $M_0N$ , très voisine de l'angle  $\widehat{T_0M_0M_1}$ . Et si l'arc est grand, le paramètre  $\lambda$  devra contenir un coefficient  $\beta$  permettant de tenir compte du coefficient balistique d'altitude.

Siacci, par une *petite altération de la vitesse*, résout un problème *très voisin* du problème qui est posé. Avec quelle virtuosité. M. Vito Volterra a fait usage de la méthode Siacci, par des altérations nouvelles de  $v$  [58].

M. l'Ingénieur général Charbonnier a créé une méthode nouvelle, en se mettant au point de vue des *développements en série*, et il a obtenu les fonctions de Siacci, comme premiers termes.

Fig. 5.



M. Charbonnier adopte la notation

$$vF(v) = \frac{1}{\Phi(v)},$$

et il remarque que l'équation de l'hodographe, si l'on prend

$$\lambda = \mu = 1, \quad w = u,$$

aura la forme approchée

$$(10) \quad \frac{dz}{\cos^2 \tau} = \frac{g}{c} \Phi(u) du.$$

Il revient alors à l'équation exacte de l'hodographe

$$du = v \frac{dR}{g} d\tau,$$

qu'il met sous la forme

$$(11) \quad \frac{dz}{\cos^2 \tau} = \frac{g}{c} (1 + \tan^2 \tau) \Phi(v) du, \quad v = u \sqrt{1 + \tan^2 \tau}.$$

Développant la fonction  $\Phi$  en série, suivant les puissances de  $\tan^2 \tau$ , et conservant seulement le terme en  $\tan^2 \tau$ , il obtient une équation

différentielle, qui est l'équation du *second terme*, l'équation (10) étant celle du *premier terme* de l'approximation. M. l'Ingénieur général Charbonnier introduit ainsi des fonctions nouvelles (CH. II, p. 343).

En outre, M. Charbonnier a calculé les « seconds termes », en tenant compte de la variation de la densité de l'air avec l'altitude, ce qui introduit des fonctions nouvelles. Cette méthode, qui est munie des tables nécessaires, est précieuse pour le calcul des tables de tir de plein fouet.

M. Charbonnier, dans cette voie, a entrepris l'étude d'un développement en série. M. Kirille Popoff, dans un Mémoire récent [61], a donné la forme de tous les termes de la série, le moyen d'effectuer les calculs, et l'étude de la *convergence*, en supposant la fonction  $F(v)$  *holomorphe*.

M. Popoff a, ainsi, complété et généralisé les études de M. Charbonnier. Dans ce Mémoire de M. Popoff, on trouvera, à la fin, un théorème de M. Charbonnier. Tout ceci projette, sur les trajectoires, une lumière nouvelle.

## CHAPITRE VI.

MÉTHODE DE GAVRE. MÉTHODE GARNIER-HAAG.  
MÉTHODE GARNIER-HAAG-MARCUS.

Les balisticiens ne se sont pas facilement résignés à calculer méthodiquement les trajectoires par *arcs successifs* (nous dirons : par arcs).

Hélie et Hugoniot ont été des *précurseurs* : ils ont recommandé le calcul par arcs, en 1884, et, en 1887, le capitaine Gossot a fait adopter par la Commission de Gâvre le calcul par arcs de Hélie et Hugoniot, dérivé de la méthode d'Euler. Toutes les méthodes de calcul par arcs introduisent bien aisément le coefficient balistique d'altitude.

La méthode de Gâvre met la loi de résistance sous la forme

$$F(v) = v^2 f(v),$$

avec une table numérique pour  $F$ , et une autre pour  $f$ .

Pour une faible variation de  $v$ , par exemple 30 ou 40 m/sec,  $f(v)$ .

ayant une variation faible, pourra être pris égal à une valeur moyenne, et l'on est ramené à la *balistique quadratique*.

La méthode de Gâvre a été perfectionnée par M. Haag, et par M. Maurice Garnier. Suivons l'exposé de M. Haag [63].

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= c_0 e^{-hy} f(v) v^2 \pm b v^2, \\ b &= \beta g \quad (h = \text{const.}); \end{aligned}$$

nous supposons :  $b$  et  $\beta$  constants sur l'arc partiel  $M_0 M_1$ . L'équation de l'hodographe :

$$\frac{du}{u^3} = \beta \frac{d\tau}{\cos^3 \tau},$$

donne

$$d\frac{1}{u^2} = 2\beta d\xi; \quad \xi = \xi_2 = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^3 \tau},$$

d'où

$$\frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_0^2} = 2\beta \int_{\tau_1}^{\tau_0} \frac{d\tau}{\cos^3 \tau} = 2\beta(\xi_{\tau_0} - \xi_{\tau_1}).$$

Ayant donné  $u_0, v_0, \tau_0, \tau_1$ , nous obtenons  $u_1$  et  $v_1$ .

Puis nous avons

$$ds = \frac{1}{b} \frac{du}{u},$$

$$s_1 - s_0 = \frac{1}{bM} \log \frac{u_0}{u_1}$$

(log désignant le logarithme vulgaire, et  $M = \log e$ ).

Pour le calcul du temps, M. Haag introduit le pseudo-arc  $\sigma$ , défini par la relation

$$dt = \frac{v}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau} = d\sigma \cos \tau,$$

ce qui donne

$$d\sigma = \frac{1}{b} d\frac{1}{u},$$

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \frac{1}{b} \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_0} \right).$$

Nous connaissons donc (pour  $b$  constant) l'arc  $M_0 M_1$  et le pseudo-arc correspondant.

Ensuite, pour éviter des calculs trop pénibles, les rapports

$$(A) \quad \frac{x_1 - x_0}{s_1 - s_0}, \quad \frac{y_1 - y_0}{s_1 - s_0}, \quad \frac{t_1 - t_0}{\tau_1 - \tau_0},$$

sont obtenus par des formules simples d'Euler ou de Legendre, ou de

Didion, ou de la Commission de Gâvre, formules choisies *a priori*, qui ne tiennent aucun compte de  $v_0$ , de  $v_1$ , du régime des vitesses, c'est-à-dire de *l'élément mécanique* de cette question.

M. Haag a fait une discussion habile, à ce sujet, distinguant l'erreur balistique et l'erreur géométrique.

*L'erreur balistique* provient de ce que, sur un arc, on prend  $b$  et  $\beta$  constants. *L'erreur géométrique*, si l'on suppose  $s_1 - s_0$  et  $\sigma_1 - \sigma_0$  obtenus rigoureusement, provient des rapports ( $\Lambda$ ) *arbitrairement choisis*. M. Haag préfère ceux de Didion. Et pour diminuer l'erreur balistique sur  $v_1$ , il choisit, comme valeur de  $\beta$ , la valeur moyenne  $\sqrt{\beta_0 \beta_1}$  ou  $\frac{\beta_0 + \beta_1}{2}$ ,  $\beta_0$  et  $\beta_1$  étant les valeurs de  $\beta$  aux extrémités  $M_0$  et  $M_1$  de l'arc. Cependant M. Haag n'arrive à cette conclusion qu'en supposant l'arc  $M_0 M_1$  *infinitement petit*. Or il est impossible de voir, dans un arc infinitement petit, *le modèle réduit* d'un arc *fini*.

Cette théorie ne nous donne, au point de vue analytique, qu'une indication; mais cette indication est précieuse. Il faudra, dans les calculs numériques, vérifier que les arcs partiels sont assez petits pour que les conclusions précédentes leur soient, approximativement, applicables.

Assurément, si l'arc partiel est assez petit, prendre pour valeur de  $\beta$  un nombre  $\beta'$ , moyenne arithmétique, ou géométrique, est une idée toute naturelle. On ne peut choisir cette moyenne  $\beta'$ , sans quelque tâtonnement, puisque,  $\tau_1$  étant donné, on obtient  $v_1$ ,  $s_1$ ,  $x_1$ ,  $y_1$  en fonction de  $\beta'$ . Et il faudra que la valeur  $\beta'$ , choisie *a priori*, coïncide, très approximativement, avec la moyenne de  $\beta$  sur l'arc  $M_0 M_1$ , qui a été calculé d'après ce choix de  $\beta'$ .

L'habitude de ce genre de calcul rend ce tâtonnement facile.

Quant au choix des rapports ( $\Lambda$ ), on pourrait dire, je crois, qu'il n'est pas de règle indiscutable, actuellement, pour déterminer ce choix, et même que, pour des arcs assez petits, ce choix n'a pas grande importance.

Une discussion analytique complète, sur ce point, serait difficile. Si elle était achevée, cela équivaldrait à la connaissance analytique complète des Trajectoires. Mais, le maniement méthodique des calculs numériques peut donner des indications suffisantes sur les limites des erreurs, et ainsi le calculateur obtient une sécurité convenable.

Dans les calculs par arcs, le choix des amplitudes ( $\tau_0 - \tau_1$ ) est une question primordiale. On pourrait déterminer les amplitudes d'arcs partiels en se plaçant au point de vue suivant : régulariser les variations du rayon de courbure de la trajectoire. On a les relations

$$v_0^2 = g \rho_0 \cos \tau_0 \quad \text{et} \quad v_1^2 = g \rho_1 \cos \tau_1,$$

qui donnent

$$\left(\frac{u_1}{u_0}\right)^2 = \frac{\rho_1}{\rho_0} \left(\frac{\cos \tau_1}{\cos \tau_0}\right),$$

et ceci permet de limiter la variation de  $\rho$ .

Ayant une variation régulière de  $\rho$ , on pourrait utiliser les rapports (A) de Legendre.

On peut employer des moyens extrêmement variés. La meilleure méthode, dans la Balistique, n'est pas celle qui séduit davantage, au point de vue philosophique et esthétique, mais bien celle qui est plus facile à réaliser, et plus soignée dans l'exécution.

Peu à peu, sous la pression des nécessités, la méthode G. H. a évolué et s'est muée en la méthode G. H. M. (Garnier, Haag, Marcus), actuellement mise au point et perfectionnée par M. Garnier [64].

M. Marcus a été l'initiateur; c'est lui qui a proposé de supprimer les transformations analytiques et de faire uniquement des calculs d'approximation numérique. La tendance qui prévaut, actuellement, est de perfectionner les méthodes de *calcul numérique*, plutôt que de perfectionner l'*étude analytique* des équations différentielles. Mais rien n'est définitif, et une découverte pourrait modifier cette tendance actuelle.

Le point de départ de la méthode G. H. M. est l'équation de l'hodographe

$$\frac{du}{u} = \frac{cR}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{du}{u} = \rho d\xi,$$

en posant

$$cR = \rho g \quad \text{et} \quad d\xi = \frac{d\tau}{\cos \tau}.$$

On aura donc

$$L u_1 - L u_0 = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \rho d\xi = -\rho_i D\xi,$$

en posant

$$D\xi = \xi_0 - \xi_1 > 0.$$

Pour éviter tout tâtonnement, on détermine  $\rho_i$  par un calcul. Dans cette méthode, on supprime les *tâtonnements*, qui exigent un certain tact. Il existe une règle, non précisément pour la fixation des amplitudes  $D\tau$ , mais pour *vérifier* une amplitude ayant été adoptée, qu'elle est convenable.

Pouvons-nous être renseignés sur la limite de l'erreur ?

La question ne peut être posée, au point de vue analytique. En effet, on emploie la formule de Taylor, dans laquelle figurent des dérivées de  $F(\nu)$ , totalement inconnues.

Une discussion analytique complète paraît impossible, actuellement. Néanmoins les calculs ne sont pas abandonnés au hasard, car l'usage de cette méthode a fait adopter des règles pratiques, qui paraissent suffisantes, pour la limitation des erreurs. Cette méthode est efficace, et la commodité, la régularité des calculs ne laissent rien à désirer.

## CHAPITRE VII.

### MÉTHODES DIVERSES.

Je ne m'occupe pas des méthodes graphiques ou mécaniques; je ne méconnais pas leur valeur, mais ces méthodes n'entrent pas dans le cadre de cette étude.

Autrefois, lorsque les vitesses initiales ne dépassaient pas 300 ou 400<sup>m</sup> par seconde, les balisticiens ont fait grand usage de la formule de Piton-Bressant, qui représente la trajectoire par un polynôme en  $x$ , du troisième degré. Les formules de ce genre sont nombreuses; elles peuvent être utiles, dans des cas très particuliers.

**Méthodes américaines.** — Un excellent exposé a été fait par MM. Dodier et Valiron. Le calcul est dirigé de manière à être réalisé presque automatiquement, exigence ordinaire d'un Bureau de calculs. La variable est le temps, dont les valeurs sont en progression arithmétique; tous les calculs sont faits par les « différences », ce qui révèle aisément certaines erreurs numériques. Au calcul des trajectoires est lié celui des corrections [65].

**Méthodes anglaises.** — Un excellent exposé a été fait par M. Vali-

ron. La méthode de Portsmouth emploie le temps comme variable, et la vitesse horizontale comme variable auxiliaire. Les valeurs de  $t$  sont en progression arithmétique: les fonctions sont introduites par les « différences ». Le calcul des perturbations est lié à celui des trajectoires [66].

**Les résistances monomes.** — Tel est le terme employé pour désigner des lois de résistance de la forme :  $F(v) = bv^n$ . Pour  $n = 1$ , on dit : résistance linéaire. Pour  $n = 2$ , on dit : résistance quadratique, etc. On a primitivement étudié surtout la balistique dans le vide, ensuite la résistance quadratique. Les diverses résistances monomes peuvent rendre service, avec le calcul par arcs. Le cas de la résistance linéaire a été étudié par MM. de Josselin de Jong, Cavalli, Dodier. Le cas de la résistance biquadratique a été étudié par Zabudski.

M. de Sparre a également traité ce cas :  $n = 4$ , par les fonctions élémentaires, en employant un artifice voisin de celui de Borda.

**Méthodes allemandes.** — On trouve des indications, dans le *Traité de Cranz*, sur les méthodes de calcul par arcs de G. Veithen, C. Runge, W. Kutta, O. Wiener, A. von Brunn, Frh. von Zedlitz, E. Stubler.

**Méthode des vitesses fictives.** — M. Sugot a pu habilement transformer en Tables, d'un emploi facile, les résultats d'une série de calculs par arcs, méthodiquement réalisés. Cette méthode, dite « des vitesses fictives », révèle une remarquable dextérité dans l'usage des trajectoires. Cette méthode a été perfectionnée par M. Leplat.

**Méthode Dufrénois-Rousier** — Cette méthode repose sur une simplification (et une altération), qui rend possible l'intégration rapide de l'équation de l'hodographe [70]. En outre, dans l'Ouvrage de Dufrénois, Rousier, Risser, on trouve des considérations utiles, dues à M. Risser [71].

**Tir vertical.** — Le tir vertical, ou presque vertical, doit être étudié par des méthodes particulières. Cette question a fait l'objet de travaux de M. Maurice Garnier (méthode G. H. M.). On trouve tous les renseignements, sur les travaux de Cranz, Bianchi, René Garnier.

Demogue, Littlewood, etc.. dans le *Traité de Charbonnier* (t. II, p. 606 et 775).

Il est absolument impossible de mentionner tous les travaux importants : le lecteur devra consulter les livres classiques. On trouve des renseignements, dans le livre du D<sup>r</sup> Cranz, sur une méthode de Vallier. Signalons les mémorables études de M. de Sparre sur le *Tir Courbe* [69] et sur les *Grandes Trajectoires* [99], et une Note du même auteur [69] sur les trajectoires des projectiles lancés par les avions ou les dirigeables.

J'ai dû *omettre des travaux fort intéressants*. Ceux que j'ai mentionnés montrent bien que le calcul de la trajectoire plane, après de longs efforts, représente une victoire.

N'oublions pas que la trajectoire *plane* est une *approximation*. Cela résulte de ce que nous verrons dans le dernier Chapitre. Les méthodes sont très diverses, parce que les difficultés sont nombreuses et variées. Peut-être, actuellement, faut-il compter sur le concours des physiciens, pour le perfectionnement de la théorie des trajectoires ?

Il est probable que l'on pourra beaucoup demander à la Photographie. Citons, à ce sujet, les travaux de Cranz, Dunoyer, Kampé de Fériet, Quayle, Lamothe, Paul, Benoist, etc. On trouve une bibliographie détaillée dans l'exposé de M. Chalvet [72].

## CHAPITRE VIII.

### PERTURBATIONS ET CORRECTIONS.

La trajectoire plane calculée est une trajectoire qui suppose la Terre plate, l'accélération  $g$  constante, l'atmosphère calme, qui admet une altitude initiale nulle, avec une température et une pression données. Il faut pouvoir passer de la trajectoire-type à la trajectoire réelle, pour préparer le tir. Inversement, au Polygone, il faut passer de la trajectoire observée à la trajectoire-type, celle des Tables. Nous devons donc savoir faire les corrections ; ces corrections sont variées :

1<sup>o</sup> Corrections géométriques, pour tenir compte du mouvement de la plate-forme, ou du mouvement du but.

2° Corrections de régime, pour tenir compte d'une variation possible de  $\alpha$ , ou de  $v_0$ , ou de  $c_0$ .

3° Corrections aérologiques. Il faut calculer l'effet du vent, de la pluie, d'une variation de la densité de l'air due à une variation de température ou de pression.

4° Corrections astronomiques. Pour les grandes portées, on doit tenir compte de la variation normale de  $g$ , de la courbure de la Terre et de la rotation de la Terre autour de la ligne des pôles.

Mon exposé ne saurait être complet; je renvoie le lecteur au livre du commandant Charbonnier [12].

Une minime variation de la charge, une légère altération du tube font varier  $v_0$ . Une petite modification de l'obus fait varier  $c_0$ . Le vent influe sur le point de chute. Tout cela a une grande importance, si l'on veut éviter le gaspillage des munitions. La voie la plus banale, pour l'évaluation des corrections, consisterait à faire usage d'un Dictionnaire balistique serré, et à en extraire des différences, mais cette méthode ne donne pas beaucoup de satisfaction, et une théorie des corrections s'impose.

La voie normale, on le sait maintenant, est celle qui relie intimement un calcul par arcs au calcul des corrections sur chaque arc. Cette méthode a été très bien établie, comme suite de la méthode G. H. M.

M. Haag a établi une théorie des corrections, rattachée à la méthode G. H.

M. Sugot a rattaché une théorie des corrections à sa méthode des vitesses fictives.

La correction due à la rotation de la Terre a été étudiée par Poisson, P. de Saint-Robert, Astier, Résal, Zabudski, etc. Elle a fait l'objet de travaux récents de MM. Charbonnier et de Sparre. Il résulte des calculs de M. de Sparre que, pour une portée de  $100^{\text{km}}$  environ, cette correction serait de 1200 ou 1300<sup>m</sup> [100].

La correction due aux effets du vent, a été étudiée par Borda, Didion, Siaci, Résal, von Wuich, Zabudski, Haag, etc.

Des sondages de l'atmosphère permettent de connaître, à un instant  $T$ , la vitesse et la direction du vent, aux altitudes  $A_1, A_2, A_3$ . Si le vent est assez régulier, cela permet de définir un vent moyen, pendant un petit intervalle de temps. MM. Lebesgue et Borel ont

donné une définition judicieuse de ce *vent moyen*, qui est employé pour la correction. La correction de vent peut avoir une valeur notable, mais elle n'a aucun sens si le vent est irrégulier [77].

On peut rattacher à ces questions celle de l'angle de portée maxima. Dans le vide, la vitesse initiale étant donnée, la portée est maxima, si l'angle de départ vaut  $45^\circ$ . Dans l'air, la loi ne saurait être aussi simple. Ceci a fait l'objet des études de F. Astier, Zabudski, M. Ottenheimer [75 et 76].

Quelle que soit la théorie utilisée, pour le calcul des corrections, pour la réalisation pratique, les « nomogrammes » de M. d'Ocagne sont très précieux [85].

MM. Haag et Kampé de Fériet ont examiné la question des perturbations, sous sa forme générale :

Soit un arc partiel de trajectoire  $M_0M$ , on donne une altération, au point  $M_0$  :  $\partial\alpha$ ,  $\partial v_0$ ,  $\partial c$ ,  $\partial g$  ( $\partial$  est le symbole d'accroissement adopté par les balisticiens). Quelles seront les altérations  $\partial v$ ,  $\partial x$ ,  $\partial y$ ,  $\partial t$ , pour l'extrémité  $M$  de l'arc, l'inclinaison étant la même que pour le point non altéré (altérations pour  $\tau$  constant) ?

Le Mémoire de M. Haag [63] contient une théorie générale des perturbations; celui de M. Kampé de Fériet n'a pas encore été publié. Signalons les théorèmes de M. René Garnier (CH. I, p. 466).

## CHAPITRE IX.

### LE MOUVEMENT PENDULAIRE. STABILITÉ. DÉRIVATION.

I. **Introduction.** — Le problème balistique, comme tous les problèmes de mécanique, comporte deux étapes, mouvement du centre de gravité et mouvement du solide autour du centre de gravité.

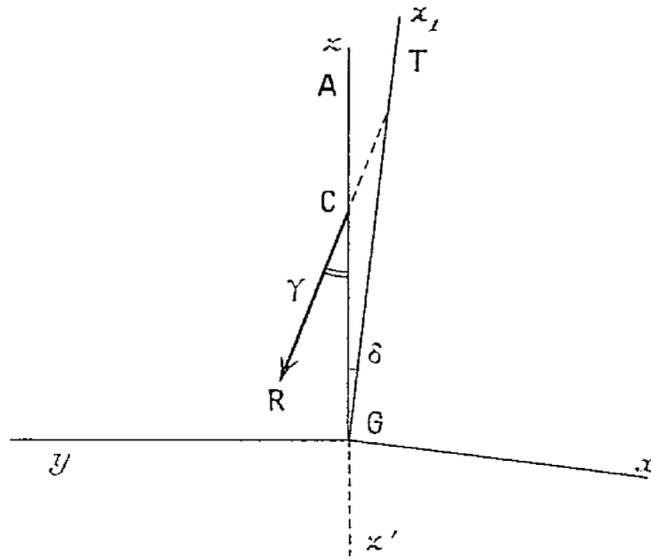
Le mouvement du centre de gravité, c'est le problème des Trajectoires. Le mouvement autour du centre de gravité, c'est le « second problème balistique », qui conduit à l'étude de la *stabilité* et de la *dérivation*. Ce second problème est-il intéressant pour l'Artillerie ? Il est inutile que je donne mon avis, à ce sujet. Mais supposons cette théorie portée à un degré de perfection tel que l'Artillerie n'en ait cure, il est certain que cette théorie serait encore extrêmement impor-

tante au point de vue de la connaissance des Lois de l'Aérodynamique.

Le projectile lancé par un canon rayé a, autour de son centre de gravité, un mouvement extrêmement complexe, que l'on nomme mouvement pendulaire ou gyroscopique. Je voudrais montrer ce que nous savons *approximativement* à ce sujet.

Au début, les phénomènes de stabilité et de dérivation ont été très mal expliqués, parce que la science de la résistance des fluides n'exis-

Fig. 6.



tait pas. Nous sommes actuellement mieux renseignés sur la résistance de l'air, néanmoins l'expérience est encore insuffisante, tant elle est difficile à réaliser.

L'image physique du phénomène est aujourd'hui la suivante :  $Gz$  est l'axe du projectile :  $G$  est le centre de gravité,  $A$  est la pointe.  $Gz_1$  est la tangente à la trajectoire de  $G$ , plus brièvement la tangente à la *trajectoire*. Le plan  $Gz_1z$  ou  $GAT$  est dit *plan de résistance*. Dans ce plan s'exerce la *poussée*  $R$ , appliquée au point  $C$  sur l'axe.

Le point  $C$  est le *centre de résistance*, posons  $GC = l$ . On a  $R = m\mathcal{R}$ ,  $m$  étant la masse et  $\mathcal{R}$  étant la retardation. La retardation a pour expression  $cF(v)$ ;  $c$  est le *coefficient balistique*, dans lequel on tient compte de l'altitude, c'est-à-dire des variations normales du poids spécifique de l'air avec l'altitude, et  $F(v)$  est une fonction de la vitesse  $v$  du centre de gravité, dite *Loi de résistance*, dont les valeurs numériques sont fournies par des Tables.

L'angle  $\widehat{AGT}$ , représenté par  $\delta$ , est l'*écart*, c'est l'élément fondamental.

Soit  $\gamma$  l'angle de la poussée avec l'axe, autre élément fondamental.

Nous représentons par  $k$  le rapport  $\gamma:\delta$ , ou le rapport des sinus, si les angles  $\gamma$  et  $\delta$  sont petits. Ce rapport  $k$  joue un rôle très important, je le nomme *coefficient d'obliquité*.

Nous supposons que le plan de résistance coïncide avec le plan de la figure, dans ce plan nous prenons l'axe  $Gy$  perpendiculaire sur  $Gz$  puis nous prenons l'axe  $Gx$  normal au plan de la figure, en avant. Le trièdre  $Gxyz$  aura pour sens d'orientation le sens des aiguilles d'une montre, tandis que le trièdre  $Gxyz'$  aura pour sens d'orientation le sens direct des astronomes. Si l'observateur est au culot, il fera usage du trièdre direct  $Gxyz'$ . Prenons actuellement ce trièdre de référence direct; si le canon est rayé à *gauche*, la vitesse de rotation propre du projectile sera un vecteur  $\Omega$  porté par  $Gz'$ .

Les forces extérieures donnent lieu, au point  $G$ , à un couple qui, par rapport au trièdre  $Gxyz'$ , a trois composantes  $\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y, \mathcal{M}_z$ .

La vitesse de rotation propre  $\Omega$  est grande et varie très peu pendant la durée du tir; il est donc permis, avec une très grande approximation, de poser  $\mathcal{M}_z = 0$ .

La composante  $\mathcal{M}_x$  est le moment de  $R$  par rapport à  $G$ , et nous avons choisi la direction  $Gx$  de telle manière que  $\mathcal{M}_x$  soit porté par  $Gx$ . On a donc

$$\mathcal{M}_x = R / \sin \gamma = R / \sin k \delta.$$

Lorsque  $\gamma$  et  $\delta$  sont petits, on a, approximativement,

$$\mathcal{M}_x = R k / \delta = m \mathcal{R} k / \delta.$$

En général, on a, exactement,

$$\mathcal{M}_x = R k_1 / \delta,$$

en posant

$$k_1 = \frac{\sin \gamma}{\delta} = k \frac{\sin \gamma}{\gamma},$$

$k_1$  est un second coefficient d'obliquité.

Si l'angle  $\gamma$  n'est pas grand, on pourra écrire

$$k_1 \sim k.$$

D'ailleurs, les valeurs numériques de  $k$  ne sont pas encore bien connues et leur détermination doit être extrêmement difficile.

La composante  $\mathcal{M}_y$  est due aux forces latérales de frottement signalées par M. Esclangon.

De même, l'effet Magnus donne lieu à une composante  $\mathcal{M}_y$ .

Un projectile est dit « stable » lorsque l'écart  $\delta$  reste assez petit, et, dans ce cas, la dérivation est faible.

A l'effet Esclangon, ou à l'effet Magnus doivent correspondre, pour des projectiles très stables, des valeurs de  $\mathcal{M}_y$  très petites, de sorte qu'il paraît possible, en première approximation, de négliger  $\mathcal{M}_y$ .

Néanmoins, sur certaines trajectoires, ou bien sur certaines zones d'une trajectoire, il est possible que les effets Magnus et Esclangon aient une *très grande importance*.

Il faut faire une remarque. M. de Sparre a souvent insisté sur la nécessité de tenir compte, dans l'action de la poussée de l'air, du fait qu'à la partie arrière de l'obus il existe une dépression. Dans ces conditions, le coefficient d'obliquité  $k$  se trouve remplacé par deux coefficients: mais nous ne sommes guère renseignés sur les valeurs numériques de ces coefficients.

Au sujet de la valeur numérique du coefficient  $k$ , il faut mentionner les expériences très intéressantes de M. Burzio [109, 112 et 113].

M. Burzio a proposé l'hypothèse suivante: sur une trajectoire,  $k$  varie en sens inverse de  $v$ . Si cette hypothèse peut être retenue, ou quelque hypothèse analogue, ce sera un grand progrès [107 et 111].

L'effet Magnus <sup>(1)</sup> est un phénomène connu, mais il faut, au sujet de Magnus, éviter toute confusion. Dans son Mémoire, présenté à l'Académie de Berlin, en 1852, le D<sup>r</sup> Magnus étudie d'abord les déviations latérales des projectiles sphériques. C'est la *seconde partie* du Mémoire qui doit, en ce moment, retenir notre attention. Dans cette seconde partie, Magnus expose les résultats de ses expériences de laboratoire, qui montrent que la dérivation normale du projectile *tournant* a lieu à droite pour un tube rayé à droite, à gauche, pour un tube rayé à gauche. On peut dire, je crois, que la poussée, telle que nous la définissons, est une conception basée sur cette expérience de Magnus, et sur des intuitions de Robins.

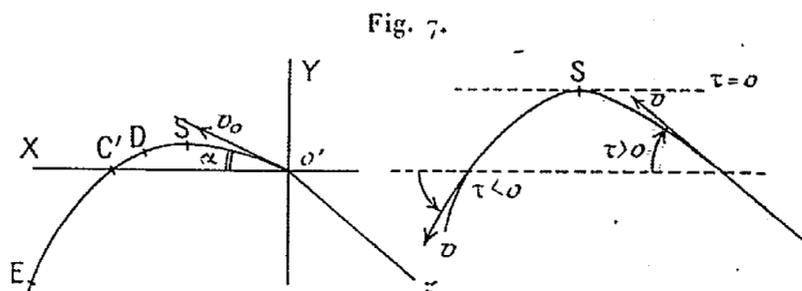
---

(1) Au sujet de la théorie de l'effet Magnus, voir C. W. OSEEN, *Hydrodynamik*, Leipzig, 1927, p. 179.

2. Les éléments de la trajectoire plane. La fonction de stabilité. — Dans la Balistique, le calcul des trajectoires est, en réalité, un calcul de trajectoires simplifiées, puisque l'on suppose essentiellement  $G$  et  $C$  confondus et la retardation tangente à la trajectoire. On a alors une trajectoire plane située dans le plan de projection. Si le projectile est assez stable, si  $\delta$  reste toujours assez petit, la trajectoire plane est une assez bonne approximation de la trajectoire véritable. Il faut rappeler quelques notions, à ce sujet.

Dans la trajectoire plane, on nomme  $v$  la vitesse du centre de gravité et  $u$  la composante horizontale de cette vitesse;  $\tau$  désigne l'inclinaison de la tangente.

L'angle de départ, dit angle de projection, est désigné par  $\alpha$ .



On a, en général, sur une trajectoire, un point D, situé après le sommet, où la vitesse est minimum. Dans le cas du tir de plein fouet (trajectoire tendue, vitesse initiale  $v_0$  grande, et  $\alpha < 10^\circ$  ou  $12^\circ$ ) ce point se trouve au delà de C', dans la partie inutile de la trajectoire.

Dans le cas du tir courbe ( $\alpha$  assez grand ou même très grand) le point D se trouve après le sommet et près du sommet.

Au delà du point D on trouve, en général, un point E, où la vitesse est maximum. Ce point E peut se trouver près du point de chute, mais, généralement, il est très au delà, dans la partie inutile de la trajectoire.

Le temps est désigné par  $t$ , il est compté en secondes à partir de l'origine du tir. Nous représentons par  $g$  l'accélération de la pesanteur, en mètres par seconde. On a la relation fondamentale

$$dt = -\frac{v}{g} \frac{d\tau}{\cos\tau} \quad \text{avec } d\tau < 0;$$

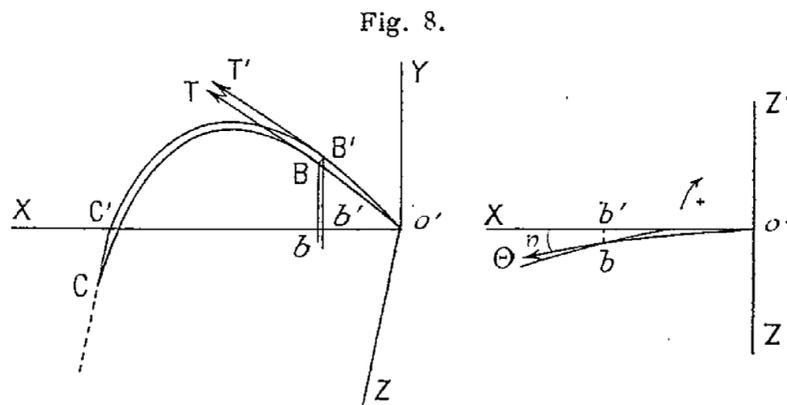
d'où

$$v = \frac{g \cos\tau}{\tau'}$$

c'est la vitesse d'abaissement de la tangente.

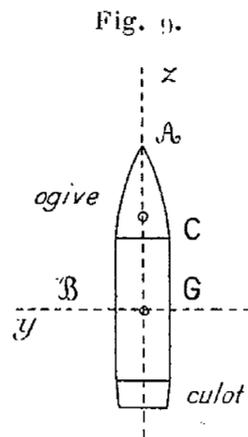
On admet, en général, que la trajectoire plane calculée  $O'B'C'$  est, approximativement, la projection sur le plan de départ de la trajectoire vraie  $O'BC$ .

Soit  $b$  la projection horizontale d'un point  $B$  de la trajectoire vraie;



soit  $O'b$  la projection horizontale de la trajectoire vraie; soit  $\Theta$  la tangente au point  $b$ .

L'angle de  $\Theta$  avec  $O'X$  est l'angle de dérivation  $\eta$ . La distance  $CC'$



(en mètres) est la dérivation au point de chute. Pour un projectile très stable, les angles  $\delta$  et  $\eta$  sont constamment petits.

Pour arriver à construire une théorie, il faut jouer habilement avec les éléments de la trajectoire plane, considérés comme *première approximation* des éléments vrais correspondants.

Nous désignons par  $a$  le diamètre du projectile, par  $p$  son poids :

$$p = mg.$$

L'unité de longueur est le mètre et l'unité de poids est le kilogramme. Nous désignons par  $\mathcal{A}$  le moment d'inertie axial et par  $\mathcal{B}$  le

moment d'inertie équatorial. Nous posons

$$P = \frac{Rkl}{\alpha\Omega}$$

et

$$Q = \frac{P}{|\tau'|}.$$

Cette fonction  $Q$  se trouve, sous une autre forme, dans les travaux de Mayevski.

Supposons d'abord  $k$  et  $l$  constants. On voit immédiatement que la fonction  $Q$  est *décroissante* sur la trajectoire, entre l'origine et le sommet. Elle est croissante, entre les points  $D$  et  $E$ . Elle aura un minimum, en un point situé entre  $S$  et  $D$ . Pour une trajectoire de plein fouet, la fonction  $Q$  est décroissante, de l'origine au point de chute, et même au delà.

Nous savons qu'il y a lieu de regarder les paramètres  $k$  et  $l$  comme *variables* sur la trajectoire. Mais, pour un projectile assez stable, on peut admettre que les variations de  $k$  et  $l$  sont assez petites pour ne modifier en rien le mode de variation de  $Q$ ; la fonction  $Q$  conservera un minimum entre  $S$  et  $D$ .

La fonction  $Q$  est connue, quand la trajectoire plane a été calculée, et nous nommerons point  $M$  le point où  $Q$  est *minimum*.

On sait qu'il existe une *zone dangereuse* sur la trajectoire, autour du point  $M$ . Dans cette région,  $\delta$  atteint son *maximum maximorum*, et, si ce maximum est trop grand, l'obus peut chavirer.

Les variations de la fonction  $Q$  peuvent être très grandes sur une trajectoire, et la nature du mouvement pendulaire dépend essentiellement du mode de variation de  $Q$ . Je nommerai cette fonction « fonction de stabilité ».

Si nous posons  $Q = \frac{1}{R}$ ,  $R$  est un rayon de courbure, qui joue un rôle important dans la théorie de M. de Sparre.

**3. Histoire de la théorie du mouvement pendulaire.** — Les premiers fusils rayés ont été créés par des armuriers de Vienne et de Nuremberg, à la fin du xv<sup>e</sup> siècle.

En ce qui concerne le rôle et l'avenir de l'artillerie rayée, Robins a été clairvoyant.

Il a annoncé que les canons rayés s'imposeraient. Il a même affirmé que l'on pourrait, à volonté, par les rayures, déplacer la trajectoire à droite ou à gauche du plan de tir. Les canons rayés, avec les projectiles oblongs munis de ceintures, sont entrés en service normal au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle. Après beaucoup de discussions et de tâtonnements, pour obtenir un tir régulier, il a fallu substituer au boulet sphérique le projectile oblong, associé au tube rayé. *Le sens de la dérivation est alors connu.*

Cependant, il faut faire une restriction. Lorsque l'angle de tir est grand (par exemple 70° environ) on constate parfois des dérivations anormales. On a même vu des obus couchés sur le sol avec leurs axes orientés dans toutes les directions.

Cela tient, probablement, à ce que la même rayure ne convient pas pour tous les angles de tir.

Nous savons actuellement que l'obus a souvent des mouvements assez violents, au début de la trajectoire. Ces mouvements, d'après M. Esclangon, engendrent des sons particuliers, faciles à distinguer des *sifflements réguliers* du projectile stabilisé.

En conséquence, je ferai toujours la convention suivante. Je substitue, à l'origine de la trajectoire (la bouche), une *origine fictive* située sur la trajectoire, à une petite distance de *l'origine vraie*. J'admets que cette origine fictive correspond à la cessation des mouvements violents de nutation.

Les deux origines étant voisines, pour un bon projectile, je conserve, par approximation, pour l'origine fictive, les données essentielles du tir :  $v_0$  vitesse initiale, et  $\alpha$  angle de projection.

Nous allons maintenant suivre les principales évolutions de la théorie.

Le colonel de Saint-Robert a eu le grand mérite de tenter, le premier, l'analyse du mouvement pendulaire. Mais cette ébauche de Saint-Robert n'offre aucune sécurité. La balistique est un art tout d'approximation : néanmoins, si l'on entre en matière par des approximations trop brutales, c'est bien dangereux.

Dans le vide, l'axe du projectile resterait toujours parallèle à sa direction primitive : *Stabilité gyroscopique*.

Le général Mayevski, le premier, a vu nettement que l'axe d'un projectile bien compris reste couché sur sa trajectoire, que  $\delta$  reste petit : *Stabilité balistique* [89].

Les méthodes de Mayevski sont très imparfaites, mais il a vu des faits essentiels en ce qui concerne le tir de plein fouet. Il a été un précurseur éminent. Le général Zabudski a suivi [90 et 91] Mayevski, dans l'étude de ces questions. Zabudski, comme Mayevski, abuse un peu de l'opération de médiation, qui consiste dans la substitution d'une valeur numérique moyenne à une expression analytique, plus ou moins simple, telle que la fonction de stabilité  $Q$ . Si la nature intime du mouvement pendulaire, à un instant  $t$ , dépend du mode de variation de l'un des paramètres qui figurent dans cette expression analytique, masquée par la médiation, alors, nécessairement, la nature intime du phénomène se trouve voilée. Toute approximation est une déformation. Toute approximation est un danger.

Après la lumineuse esquisse de Mayevski, c'est M. de Sparre qui a magistralement développé cette difficile théorie. L'Ouvrage publié par M. de Sparre, en 1875 [93], contient vraiment, pour le tir de plein fouet, la première étude solide, à la fois analytique et géométrique.

Il faut noter une conclusion du Mémoire de M. de Sparre (p. 389) : « pour diminuer la dérivation, on devra augmenter  $l$ , ce qui se fera en allongeant le projectile ». A la même époque, Withworth, à la suite de ses expériences, recommandait le projectile long.

M. de Sparre a écrit de nombreux Mémoires. Il faut signaler le Mémoire de 1894 [102], dans lequel M. de Sparre a parlé, le premier, de la stabilisation du projectile sur la branche descendante de la trajectoire, et celui de 1904 [97], qui contient une méthode d'intégration approchée remarquable. Il existe une lacune dans ce beau Mémoire de 1904 : les résultats ne sont valables que pour des trajectoires de plein fouet. D'ailleurs, cette défectuosité n'existe plus dans les derniers Mémoires de M. de Sparre. Cette question se rattache à la notion de l'*effet Garnier* et de l'*écart vrai*, que nous signalerons ultérieurement.

M. de Sparre s'est occupé des projectiles de forme irrégulière, de l'effet Magnus, de la stabilité initiale. Après avoir étudié, au point de vue du mouvement pendulaire, le tir tendu et le tir courbe, M. de Sparre a étendu l'application de ses méthodes au cas des très grandes trajectoires [100].

Dans ce cas, on sait actuellement que le projectile peut rester stable, quoique la flèche soit immense. Si, à ces hauteurs, le vide

était parfait, l'axe du projectile se transporterait, à peu près, parallèlement à sa direction initiale. Mais le vide n'est pas absolu, et, par suite, le mouvement gyroscope existe.

L'écart maximum maximorum pourrait être assez grand, mais l'écart maximum redevient petit, au point de chute.

Les travaux de M. de Sparre, sur les tirs à très grande portée, sont extrêmement intéressants.

#### 4. Les mouvements d'oscillation et les mouvements de révolution.

— Le mouvement pendulaire peut avoir deux aspects différents :

1° L'axe du projectile oscille, en restant toujours à *gauche* ou toujours à *droite* du plan vertical contenant la tangente à la trajectoire (à gauche si la rayure est à gauche ; à droite, si la rayure est à droite). J'appelle ce mouvement : *oscillation de Mayevski*. D'après Mayevski, tel était nécessairement le mode unique du mouvement pendulaire.

2° L'axe du projectile peut tourner toujours dans le même sens et faire le tour de la tangente à la trajectoire. J'appelle ce mouvement *révolution*.

M. Charbonnier [12], après avoir exposé la théorie des roulettes de M. de Sparre, a montré la possibilité du mouvement de révolution. M. de Sparre [98] a étudié, dans un cas particulier, ces mouvements de révolution.

M. F. Burzio a donné, par des calculs numériques, des exemples de mouvements de révolution [110].

Je crois avoir démontré [107] que le *passage de l'oscillation à la révolution* aura lieu, sur la branche descendante, si la fonction  $Q$  devient assez rapidement croissante, si  $|\tau|$  devient assez grand. Si l'on a, à l'origine,  $\delta_0 = 0$ , le mouvement pendulaire consistera nécessairement en une suite d'oscillations, jusqu'au point  $M$  et au delà, pouvant ensuite, sur la branche descendante, se transformer en une suite de révolutions. J'ai démontré aussi que si l'on a, à l'origine,  $\delta_0 > 0$ , et si, au début de la trajectoire, la fonction  $Q$  a une valeur numérique assez grande et assez lentement décroissante, le mouvement pendulaire consistera, à l'origine, en révolutions, qui se transformeront en oscillations, lorsque la décroissance de  $Q$  deviendra assez accentuée.

Par suite, on pourra avoir, sur les trajectoires presque verticales,

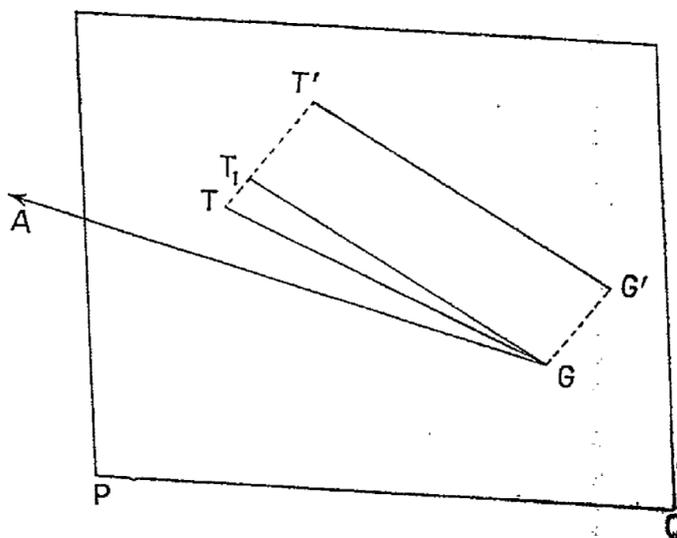
une série de révolutions, au début, et ceci permet d'entrevoir la possibilité de la *dérivation anormale* lorsque l'angle de départ est voisin de  $90^\circ$  [107]. C'est une question difficile.

Le mouvement d'oscillation, comme le mouvement de révolution, est, bien entendu, un schéma très simplifié, car, en réalité, des mouvements de nutation se superposent à ceux-ci. Mais ces schémas simplificateurs sont indispensables.

L'existence des oscillations de Mayevski, sur une grande partie de la trajectoire, donne, d'une façon rudimentaire mais claire, l'explication théorique de la dérivation normale, à droite pour un tube rayé à droite. La dérivation étant reconnue, il est clair que la trajectoire ne sera pas exactement plane.

5. *L'écart vrai et l'écart conventionnel.* — Soit  $G'$  un point de la trajectoire plane, à l'instant  $t$ ; soit  $G'T'$  la tangente. Au même instant  $t$ , le centre de gravité sera exactement au point  $G$ , voisin de  $G'$ ;

Fig. 10.



soit  $GT$  la tangente de la trajectoire vraie. Soit  $GT_1$  la parallèle à  $G'T'$ ; soit  $GA$  l'axe du projectile à l'instant  $t$ . Les théories primitives, pour simplifier, substituaient, par approximation, à l'écart qui est l'angle  $\widehat{AGT}$ , un écart conventionnel qui est l'angle  $\widehat{AGT_1}$ . M. Maurice Garnier a attiré l'attention sur la nécessité de calculer l'écart vrai.

Il faut, pour cela, tenir compte, dans les équations, de l'angle  $\eta$  que fait la projection horizontale de GT avec la trace horizontale OP du plan de départ. On nomme « effet Garnier » l'influence de ce petit angle  $\eta$  sur l'écart [126] et [127].

Dans son Mémoire de 1927 [92], M. Charbonnier a tenu compte de l'effet Garnier, et l'on trouve, dans ce Mémoire, une intéressante discussion sur la « stabilité de précession » et sur la « stabilité de nutation ».

6. **Histoire de la théorie du mouvement pendulaire (suite).** — Il est souvent difficile d'apprécier le degré d'approximation des théories de ce genre, à cause du nombre considérable d'hypothèses introduites dans le but de simplifier les données du problème. En outre, lorsque l'on fait certaines approximations, pour simplifier la théorie analytique, on risque d'altérer et de *déformer gravement* les éléments analysés. Enfin, quand on adopte un certain mode d'approximation, dans les calculs, le degré d'approximation ne reste pas, en général, *uniforme* sur toute la trajectoire.

La mise en équations de M. de Sparre, dans ses Mémoires de 1923-1924-1927 [99, 100 et 101], est plus complète et plus précise que celle de ses Mémoires antérieurs [127].

Un Mémoire extrêmement original est assurément celui de MM. Fowler, Gallop, Lock et Richmond [104], étude théorique et expérimentale, inspirée par une *méthode parfaite*.

Notons que MM. Fowler, etc. veulent introduire dans leur étude toutes les forces et les couples correspondant au mouvement pendulaire. Ils ont fait des expériences pour obtenir des valeurs numériques de tous ces éléments physiques. Et ce Mémoire contient des méthodes d'approximation nouvelles et remarquables.

M. Esclangon a fait, de 1914 à 1918, des travaux mémorables et efficaces sur le « repérage par le son », et il a été amené à étudier les trajectoires et le mouvement pendulaire [103]. Il a vu, en parfait physicien, le parti que l'on peut tirer du rapprochement des variations des sons et des variations d'allure du mouvement gyroscopique. Voilà une méthode sûre, et l'avenir lui appartient. M. Esclangon attache une importance prépondérante aux *frottements latéraux* de l'air, pour expliquer la stabilité des projectiles. Et il a aussi posé les fondements d'une théorie analytique. Cette théorie comprend deux

étapes : d'abord la recherche de *l'axe instantané de précession*, ensuite la recherche de *l'axe dynamique d'équilibre*.

Dans son Mémoire, infiniment original, paru en 1927, M. Esclangon a donné une parfaite description de la méthode qui s'impose. M. Esclangon s'est surtout préoccupé de la nature physique des phénomènes, de l'action des frottements latéraux, des modifications de la forme du projectile pouvant engendrer des frottements stabilisateurs. En raison de l'importance que M. Esclangon attachait à ces faits physiques, il était naturel que, pour lui, la distinction de l'écart vrai et de l'écart conventionnel fut sans intérêt. On fait, assurément, une séparation artificielle des phénomènes, lorsqu'on tient compte de l'effet Garnier, en négligeant les effets Magnus et Esclangon. De même, on fait une séparation artificielle, lorsqu'on néglige certains effets, en ne tenant compte que des frottements latéraux. C'est exactement ce qu'il faut faire pour arriver, peu à peu, au but, savoir : la connaissance des *répercussions sur le mouvement pendulaire* d'une modification de structure du projectile.

Pour arriver à ce but, il faudra encore bien des travaux théoriques, une connaissance plus précise de la Mécanique des fluides, des expériences, des analyses photographiques, des analyses sonores, etc.

Nous sommes encore dans la période des recherches, des hésitations, des travaux fragmentaires et inachevés.

Parmi les obstacles que l'on rencontre, il faut citer l'obscurité qui enveloppe encore les variations du coefficient d'obliquité  $k$ , et notre ignorance au sujet de l'effet de la cavitation à l'arrière du projectile.

Au sujet des équations exactes du mouvement gyroscopique, je signale la Note [129] dont le développement n'a pas encore été publié.

7. **Questions diverses.** — Il faut stabiliser le projectile au départ, c'est-à-dire fixer la vitesse de rotation  $\Omega$ , de telle sorte que l'écart  $\delta$  reste petit à l'origine. Question complexe parce que, au départ, sous l'influence du recul, des vibrations, de l'explosion des gaz, le projectile peut avoir un mouvement de nutation.

Je rappellerai que les premiers travaux importants, sur ce sujet, sont ceux de Zabudski (1891 et 1895), et ceux de M. de Sparre (1894, 1896 et 1904).

M. de Sparre a donné un critère de stabilité, dans ses Mémoires de 1904 et 1927 [97 et 101].

M. Esclangon a fait une discussion sur la nature de la stabilité (Mém. 1927, p. 778-792) [103], discussion remarquable.

La valeur de  $\Omega$  fixe l'inclinaison des rayures, dans le tube. Pour que le phénomène gyroscopique ait lieu, il faut que le paramètre  $\Omega$  ait une grande valeur, de sorte que  $\Omega$  joue, dans la théorie, le rôle d'un *grand nombre*. Cependant, dans le cas du tir courbe, si  $\Omega$  était trop grand, cela nuirait à la stabilité sur la branche descendante.

Les premiers travaux, au sujet de la détermination de  $\Omega$ , supposaient le départ *régulier*, c'est-à-dire les nutations initiales nulles ou négligeables. Mais ces nutations initiales peuvent être fortes. Par exemple, des observations, faites avec des écrans, ont permis à M. Fowler de déceler des écarts de 3°, 4°, 5°, tout près de l'origine de la trajectoire. M. Fowler [104], M. Charbonnier [92], M. Sugot (Mémoire cité dans la préface), ont fait l'étude théorique de ces perturbations initiales. Ces perturbations, dont la nature est encore mal connue, pourraient bien rendre extrêmement difficile la détermination théorique de  $\Omega$ . Actuellement, et pour beaucoup de raisons, il est vraisemblable que l'expérience seule fixe le choix de  $\Omega$ . Cette question demeure très intéressante pour le théoricien.

Nous savons que la dérivation normale est une déviation latérale, à droite si le canon est rayé à droite. Le calcul de la dérivation normale a été fait par Mayevski, Zabudski, M. de Sparre, M. Charbonnier, MM. Prescott, Fowler, Esclangon, etc.

Cette théorie n'est pas achevée, en particulier à cause de la présence de coefficients numériques inconnus ou mal connus. Il faudrait arriver à évaluer la *répercussion, sur la dérivation, d'une modification de forme de l'obus*. La théorie de la dérivation exigera encore beaucoup d'efforts. Et il est probablement difficile d'augmenter la portée, et, en même temps, la précision du tir.

Je n'ai parlé que des projectiles *tournants*. Au sujet des projectiles *empennés*, associés aux tubes lisses, on pourra consulter les travaux de MM. Duchêne [118], Andreau [119], et le Mémoire de M. Esclangon de 1927 (p. 754) [103].

8. *Conclusion*. — Je termine cet examen rapide, en insistant sur les difficultés que présentent les méthodes d'approximation. Par

exemple, les facteurs d'amortissement de MM. Garnier et Charbonnier, d'une part, et de M. de Sparre, d'autre part, n'ont pas la même forme. Cela tient à ce que les modes d'approximation ne sont pas identiques. Certaines approximations, un peu hardies, donnent une *indication* plutôt qu'une *démonstration*. Mais il faut bien reconnaître que rien n'eût été fait, si l'on avait recherché, de prime abord, une précision qui ne viendra que plus tard.

Je mentionnerai encore les Mémoires de MM. Fowler et Esclangon [104] et [105], qui représentent, l'un et l'autre, un progrès considérable.

Quelle que soit la conception admise, au sujet du rôle des frottements latéraux, la notion d'*axe dynamique d'équilibre*, de M. Esclangon, repose sur une intuition puissante. Cet axe est, pour le projectile stable, ce que la verticale est pour la toupie dormante : le bon projectile *dort* sur son axe d'équilibre dynamique. En outre, il existe un effet d'*amortissement*. L'axe de figure d'un bon projectile se rapproche de plus en plus de l'axe d'équilibre dynamique.

L'*axe instantané de précession*, qui est voisin de l'axe nommé « axe moyen », par M. de Sparre, est une approximation de l'axe dynamique d'équilibre. Une étude approfondie montre que cette approximation est valable seulement lorsque, sur la trajectoire, *la vitesse reste assez grande*. Je signale, à ce sujet, la Note [128] dont le développement n'a pas encore été publié.

M. Fowler a donné, pour le mouvement gyroscopique, des équations approchées nouvelles, et il a fait une étude savante des *mouvements violents de nutation*, à l'origine de la trajectoire. Cette perturbation initiale existe souvent, à la bouche, pendant une seconde, environ, ou bien une fraction de seconde, période d'*instabilité*, qui se termine par une stabilisation, à une petite distance de la bouche. Cette première stabilisation pourrait être nommée « préstabilisation », car cette stabilité initiale du bon projectile pourrait être compromise plus loin, dans la zone dangereuse.

Les études de M. Fowler sont remarquables, au point de vue de la précision des observations, et au point de vue de l'habileté des méthodes analytiques.

---

## INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

Le *Mémorial de l'Artillerie française* sera désigné par *M. A. F.*; le *Mémorial de l'Artillerie de la Marine* par *M. A. M.*, et la *Revue d'Artillerie* par *R. A.*

Le sujet est tellement vaste, que la Bibliographie est réduite au *minimum*.

## CHAPITRE I.

1. LEVI-CIVITA E AMALDI. — *Lezioni di meccanica razionale* (Bologna, Nicola Zanichelli).
2. LECORNU. — *Cours de Mécanique*, 3 vol. (Gauthier-Villars, 1914, 1915, 1918).
- 2 bis. PAINLEVÉ. — *Cours de Mécanique professé à l'École Polytechnique* (Gauthier-Villars, 1930).
3. CRANZ (C.) et VALLIER (E.). — *Balistique, Encyclopédie des Sciences mathématiques* (Gauthier-Villars, 1913).
4. SAINT-ROBERT (P. DE). — *Mémoires scientifiques*, t. I (Turin, 1872).
5. MAYEVSKI (trad. par KLUSSMANN). — *Über die Lösung der Probleme des direkten und indirekten Schiessens* (Berlin, 1886).
6. WUICH (N. VON). — *Lehrbuch der ausseren Ballistik* (Wien, 1886).
7. HEYDENREICH. — *Lehre vom Schuss* (Berlin, 1908).
8. LORENZ (H.). — *Ballistik* (Berlin, 1917).
9. CRANZ (C.). — *Aussere Ballistik*, 5<sup>e</sup> édition (Julius Springer; Berlin, 1925).
10. HANERT (L.). — *Geschutz und Schuss* (Julius Springer; Berlin, 1928).

## TRAVAUX DE M. CHARBONNIER.

11. Traité de balistique extérieure, 1<sup>re</sup> édition (*M. A. M.*, 1900), et 2<sup>e</sup> édition (Béranger; Paris, 1904).
12. *Balistique extérieure rationnelle*, 2 vol. (Doin; Paris, 1907).
13. Sur un théorème de balistique (*M. A. M.*, t. 22, 1894).
14. Les théorèmes généraux de la balistique généralisée (*M. A. F.*, t. 2, 1923).
15. ESCLANGON. — *L'acoustique des canons et des projectiles* (Gauthier-Villars, 1925).
16. SPARRE (M. DE). — Sur la trajectoire des projectiles lancés avec une grande vitesse. Sur l'influence des conditions atmosphériques (*C. R. Acad. Sc.*, 20 décembre 1915, 3 janvier 1916, 3 avril 1916).
17. SPARRE (M. DE). — Sur le calcul des grandes trajectoires (*Ann. Soc. sci. Bruxelles*, t. 42, 1923).
18. ADHÉMAR (R. D'). — Les variations de la vitesse du projectile sur sa trajectoire (*Ann. Soc. sci. Bruxelles*, t. 47, 1927).

19. STOYANOFF (A.). — Sur la vitesse minimum des projectiles dans un milieu à densité constante (*M. A. F.*, 1931).
20. PAINLEVÉ. — *Leçons sur la résistance des fluides non visqueux, rédigées par A. Métral* (Gauthier-Villars, 1930).
21. BECKER und GRANZ. — Messungen über den Luftwiderstand (*Art. Monatsh.*, 1912).
22. EBERHARD (VON). — Neue Versuche über Luftwiderstand (*Art. Monatsh.*, 1912).
23. VALIRON. — Remarques sur le problème de l'ogive de moindre résistance (complément d'une étude de M. de Masson d'Autume) (*M. A. F.*, 1922).
24. DUPUIS (J.). — Les lois de la résistance de l'air (*M. A. F.*, 1923).
25. — Expériences récentes sur la résistance de l'air (*M. A. F.*, 1928).
26. DARRIEUS (G.), LANGEVIN (P.), JOUGUET (E.) et GARNIER (M.). — Notes sur la loi de la résistance de l'air (*M. A. F.*, t. 1, 1922).
27. VESSIOT. — Remarque sur l'application du principe de l'homogénéité à la balistique extérieure (*M. A. F.*, 1925).
28. ROY (Maurice). — Sur l'onde balistique et le mouvement d'un fluide compressible (*M. A. F.*, 1925).
29. — Note sur l'état actuel de nos connaissances théoriques concernant la résistance de l'air (*M. A. F.*, 1925).

## CHAPITRE II.

30. ALEMBERT (J. D'). — *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* (Paris, 1744).
31. BEZOUT (E.). — *Cours de Mathématiques à l'usage du cours royal d'Artillerie* (Paris, 1788).
32. SIACCI. — *C. R. Acad. Sc.* (Paris, 1901).
33. GREENHILL. — *Proc. Artillery Institution* (Woolwich, 1882, 1886, 1889).
34. DRACH. — L'équation différentielle de la Balistique extérieure (*Ann. sci. Éc. Norm. Sup.*, 1920).
35. SPARRE (M. DE). — Étude du mouvement du projectile dans le cas où la résistance de l'air est supposée proportionnelle au cube de la vitesse (*M. A. M.*, t. 27, 1899).
36. CAVALI. — Le problème balistique du prochain avenir (*M. A. M.*, 1923).
37. STEFANO (A. DE). — La trajectoire du centre de gravité d'un projectile dans un milieu de densité variable (*M. A. F.*, 1924).
38. SIGNORINI (Antonio). — Un teorema di confronto in balistica esterna (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 43, 1919); Sulla velocità minima (*Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, Roma, settembre 1922); Sull'Integrazione approssimata delle equazioni della Balistica Esterna (*Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, Anno CCCXX, 1923).
39. PICONE (Mauro). — Sul moto dei gravi nell'atmosfera (*Bolletino dell'Unione Matematica Italiana*, Anno IX, 1930).

40. POPOFF (Kyrille). — *Les méthodes d'intégration de Poincaré et le problème général de la Balistique extérieure* (Gauthier-Villars, 1925); Sur la convergence des séries de la Balistique extérieure (*M. A. F.*, t. 8, 1929); Sur les points singuliers des intégrales du mouvement (*M. A. F.* t. 9, 1930); Sur le mouvement d'un point dans un milieu résistant à densité variable (*M. A. F.*, t. 10, 1931).

## CHAPITRE III.

41. EULER. — Recherches sur la véritable courbe (*Mém. Acad. roy. prus.*, 1753).  
 42. GRAEWENITZ (Comte de). — Discussion académique sur la trajectoire des projectiles (Rostock, 1764, trad. par RIEFFEL dans le *Journal des armes spéciales*, 1845).  
 43. OTTO. — Tafeln für den Bombenwurf (Berlin, 1842, trad. par RIEFFEL dans le *Journal des armes spéciales*, 1844).  
 44. LARDILLON. — Transformation des tables balistiques de Graewenitz (*R. A.* t. 32, 1888).  
 45. SIACCI. — Sur l'établissement des tables du tir vertical (forme nouvelle des tables d'Otto (*R. A.*, t. 26, 1885).

## CHAPITRE IV.

46. BERNOULLI (Jean). — *Acta eruditorum* (Leipzig, 1719 et 1721); *Opera*, t. II (Lausanne et Genève, 1742).  
 47. LEGENDRE. — *Dissertation sur la question de balistique proposée par l'Académie* (Berlin, 1782).  
 48. DIDION. — *Traité de Balistique* (Paris, Mallet-Bachelier, 1<sup>re</sup> édition, 1848; 2<sup>e</sup> édition, 1860).

## CHAPITRE V.

49. BORDA (Chevalier de). — Sur la courbe décrite par les boulets (*Mém. Acad. sc., Paris*, 1769).  
 50. SIACCI (F.). — *Corso di balistica*, 3 vol. (Roma, 1870-1884); traduction française (Berger-Levrault; Paris, 1892).  
 51. FASELLA (E.). — *Tavole balistiche secondarie* (Gênes, 1901).  
 52. BRACCIALINI (S.). — *Ueber die Lösung der Probleme des Schiessens* (Berlin, 1884).  
 53. SPARRE (M. DE). — Sur l'emploi des Tables de Siacci dans le cas des grands angles de projection (*Ann. Soc. sci. Bruxelles*, 1901).  
 54. CHARBONNIER (P.). — Manuel de Balistique extérieure (tables des fonctions balistiques du second terme) (*Mém. Art. nav.*, t. 2, 1908).  
 55. ETTORE CAVALLI (Lieutenant-Général). — *Balistica esterna* (Turin, 1928).  
 56. BIANCHI. — *Corso di Balistica esterna* (Turin, 1922).  
 57. BURZIO (Filippo). — Sulla soluzione Siacci (*Rivista d'Artiglieria e Genio*, Roma, 1926).  
 58. VOLTERRA (Vito). — Metodo di calcolo degli elementi di tiro per artiglieria aeronautica (*Rendiconti dell'Istituto centrale aeronautico*, Roma, 1916).

59. FUBINI (Guido). — Alcune formole di balistica et Osservazioni sul calcolo delle traiettoria (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, Roma, 4 et 18 février 1917).
60. ÉMERY (Général). — Étude sur l'emploi de certaines transformations en Balistique extérieure (homographies balistiques) (*M. A. F.*, 1928).
61. POPOFF (Kyrille). — Sur les formules du tir de plein fouet de M. l'ingénieur général Charbonnier (*M. A. F.*, 1931).

## CHAPITRE VI.

62. HÉLIE. — *Traité de Balistique expérimentale* (Paris, 1865); 2<sup>e</sup> édition par HÉLIE et HUGONOT, 2 vol. (Paris, 1884).
63. HAAG (J.). — Le calcul des trajectoires et de leurs altérations (*Journ. Éc. Polyt.*, 2<sup>e</sup> série C, t. 21, 1921).
64. GARNIER (M.). — Calcul des tables et abaques de tir (méthode G. H. M.) (*M. A. F.*, t. 8, 1929; t. 9, 1930).

## CHAPITRE VII.

65. DODIER et VALIRON. — Calcul des trajectoires par arcs et des altérations, d'après les méthodes américaines (*M. A. F.*, 1927).
66. VALIRON. — Calcul des trajectoires par arcs successifs et calcul des altérations, par la méthode anglaise de Portsmouth (*M. A. F.*, 1927).
67. VALLIER. — De la solution des problèmes du tir courbe, étude sur un ouvrage du capitaine Zadoudski (*R. A.*, t. 34, 1889).
68. ZABOUDSKI. — Supplément à la solution des problèmes du tir courbe (*R. A.*, t. 38, 1891).
69. SPARRE (M. DE). — Étude du mouvement du projectile dans le cas où la résistance de l'air est supposée proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse (*M. A. M.*, t. 27); Notice sur le tir courbe (*M. A. M.*, 1<sup>er</sup> Mémoire en 1892; 2<sup>e</sup> Mémoire en 1893; 3<sup>e</sup> Mémoire en 1894; 4<sup>e</sup> Mémoire en 1896); Sur les trajectoires des projectiles lancés par les avions ou dirigeables (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 3 mai 1915).
70. DUFRÉNOIS, RISSER, ROUSIER, *Les méthodes actuelles de la Balistique extérieure* (Gauthier-Villars, 1921).
71. RISSER. — Recherche de formules représentatives des trajectoires (*M. A. F.*, t. 1, 1922).
72. CHALVET (M.). — Application de la photographie à l'artillerie (*M. A. F.*, 1931).

## CHAPITRE VIII.

73. CHARBONNIER (Commandant). — Étude de l'influence de la rotation de la Terre (*Journ. Éc. Polyt.*, 1908).
74. — Calcul des effets de la rotation de la Terre (*Mém. Art. nav.*, 1908).
75. OTTENHEIMER. — *Balistique extérieure* (Coll. A. Colin, 1924).

76. — Étude du coefficient différentiel de la portée (*M. A. F.*, 1930).
77. BOUTROUE (P.). — Sur le vent balistique (*M. A. F.*, 1926).
78. — Sur la correction de portée due à la rotation de la Terre (*M. A. F.*, 1923).
79. ZADUDSKI (N.). — *Sur la solution du problème du tir indirect et sur l'angle de plus grande portée* en langue russe (Saint-Petersbourg, 1888).
80. HANERT (L.). — La déformation de la trajectoire par la rotation terrestre (*Z. Physik.*, t. 62, 1930).
81. GARNIER (M.). — Sur les altérations de portée dues aux perturbations atmosphériques (*M. A. F.*, t. 1, 1922).
82. BLISS. — The Use of Adjoints Systems in the problem of differential corrections (*J. of the U. S. Artillery*, 1919).
83. MOULTON. — Numerical Integration of differential equations (*J. of the U. S. Artillery*, 1919).
84. MILNE. — Equations of differential variations in Exterior Ballistics (*J. of the U. S. Artillery*, 1919).
85. OCAGNE (M. D'). — *Principes usuels de Nomographie, avec application à divers problèmes concernant l'aviation et l'artillerie* (Gauthier-Villars, 1920).

## CHAPITRE IX.

86. ROBINS (B.). — *New principles of gunnery* (Londres, 1742); trad. par L. EULER (Berlin, 1745); trad. par DUPUY en 1771 et par LOMBARD en 1773.
87. MAGNUS (G.). — De la déviation due au mouvement de rotation des projectiles (*Berichte Akademie*, Berlin, 1852, et *Ann. Phys. und Chemie*, *Zweite Folge*, 1853).
88. POISSON. — Mémoire sur le mouvement des projectiles dans l'air (*Journ. Éc. Polyt.*, 1838-1839).
89. MAYEVSKI (N.). — *Traité de Balistique extérieure* (traduction) (Gauthier-Villars, 1872) (Les premiers travaux de MAYEVSKI ont été publiés en 1865).
90. SABUDSKI. — Untersuchungen über die Bewegung der Langgeschosse (trad. all. RITTER VON EBERHARD) (*Grub Verlag Stuttgart und Berlin*, 1909).
91. ZABUDSKI (N.). — *Vnesnia balistica* (Balistique extérieure, en langue russe) (Saint-Petersbourg, 1895).
92. CHARBONNIER (Ingénieur Général P.). — Sur le mouvement gyroscopique du projectile (*M. A. F.*, t. 6, 3<sup>e</sup> fasc., 1927).
93. NOTHER (F.) et SOMMERFELD (A.). — Nachrichten Ges. Wiss. zu Göttingen (*Math. Phys. Klasse*, 1919).
94. VAHLEN (Theodor). — *Ballistik* (Berlin, Walter de Gruyter, 1922).

## TRAVAUX DE M. DE SPARRE.

93. *Mouvement des projectiles oblongs dans le cas du tir de plein fouet* (Gauthier-Villars, 1875).

96. Sur le mouvement des projectiles dans l'air (*Ann. Soc. sci., Bruxelles*, 15<sup>e</sup> année, 1890-1891).
97. Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité (*Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik, Stockholm*, 1904).
98. Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité (*Ann. Soc. sci. Bruxelles.*, t. 35, 1911).
99. Sur le calcul des grandes trajectoires des projectiles (*Ann. Soc. sci. Bruxelles*, t. 42 et 43, 1922-1923).
100. Calcul du temps et de la dérivation dans les grandes trajectoires des projectiles (*Ann. Soc. sci. Bruxelles*, t. 44, 1924).
101. Mouvement des projectiles autour de leur centre de gravité et conditions à remplir pour assurer leur stabilité (*Ann. Soc. sci. Bruxelles*, t. 47, 1927).
102. Sur le mouvement des projectiles oblongs et sur les conditions de stabilité de ces projectiles, 2 Mémoires (*M. A. M.*, 1894, 1896).
103. CRANZ (C.) et SCHMUNDT (W.). — Calcul d'une trajectoire en tenant compte de l'effet gyroscopique et de l'effet Magnus (*Zeitschrift f. Ang. Math. und Mechanik*, Berlin, 1924; trad. *M. A. F.*, 1927).
104. FOWLER (R. H.), GALLOP (E. C.), etc. — Aérodynamique d'un projectile tournant (*M. A. F.*, t. 1, 1922, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> fasc.).
105. ESCLANGON (E.). — Mouvement des projectiles autour de leur centre de gravité (*M. A. F.*, 1927).
106. PAINLEVÉ et PLATRIER. — *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique* (Gauthier-Villars, 1929).
107. ADHÉMAR (Robert d'). — Sur le mouvement pendulaire des projectiles stables, 1<sup>er</sup> Mémoire (*M. A. F.*, 1929); 2<sup>e</sup> Mémoire (*M. A. F.*, 1932). Étude du mouvement pendulaire d'un projectile tournant (*Conférence faite au Congrès international de Mécanique technique à Stockholm*, août 1930).

## TRAVAUX DE M. BURZIO.

108. Sul moto et sulla stabilita dei proetti (*Rivista di artiglieria e genio*, 1918).
109. Une legge aerodinamica stabilita con deduzione balistiche (*Atti associazione Italiana di Aerotecnica*, Roma 1925).
110. *Il secondo problema balistico* (Tipografia Olivero; Torino, 1927).
111. Recherches sur la rotation des projectiles (*M. A. F.*, 1927).
112. Essais aérodynamiques des projectiles (*M. A. F.*, 1928).
113. Expériences sur la résistance oblique de l'air (*M. A. F.*, 1929).
114. SPARRE (M. DE). — (Lettre adressée à M. Filippo Burzio), Osservazioni del Comte de Sparre alle prove del Prof. Burzio sulla resistenza dell'aria (*Rivista d'Artiglieria e Genio*, Roma, Augusto, 1930).
115. BAIRSTOW, FOWLER, HARTREE. — Distribution des pressions sur la tête d'un projectile se déplaçant à grande vitesse (*M. A. F.*, 1923).
116. SUGOT (G.). — Note sur la dépendance de la vitesse initiale et de l'inclinaison des rayures nécessaires à la stabilisation initiale du projectile (*M. A. F.*, 1928).

117. DÉVÉ (C.). — Ondes de choc et interprétations de photographies aérodynamiques (*M. A. F.*, 1929).
118. DUCHÈNE. — Notions sur l'équilibre et la stabilité des projectiles empennés (*M. A. F.*, 1922).
119. ANDREAU. — Les projectiles empennés et la précision (*M. A. F.*, 1922).

## POST-SCRIPTUM.

120. J. HADAMARD. — Rapport sur les travaux examinés par la Commission de Balistique pendant la durée de la guerre (*M. A. F.*, t. 1, 1922).
121. L. PATARD. — Historique de la Commission d'expériences de Gâvre (Paris, Imprimerie Nationale, 1931).
122. Filippo BURZIO. — Prove intorno alla velocità del suono (*Rivista d'Artiglieria e Genio*, Roma, 1931).
123. H. PARODI. — Méthode d'intégration par arcs successifs (*C. R. Acad. Sc.*, 26 octobre 1931).
124. L. GABEAUD. — Sur la résistance de l'air (*M. A. F.*, t. 11, 1932).
125. P. DEPREUX. — Sur la résistance de l'air à l'arrière des projectiles (*M. A. F.*, t. 11, 1932).
126. ADHÉMAR (Robert d'). — Sur le mouvement pendulaire des projectiles stables, 3<sup>e</sup> Mémoire (*M. A. F.*, 1933).
127. ADHÉMAR (Robert d'). — Notice sur le Comte de Sparre (*M. A. F.*, 1933).
128. ADHÉMAR (Robert d'). — Le mouvement gyroscopique des projectiles stables (*Congrès International des Mathématiciens*, Zurich, 1932).
129. ADHÉMAR (Robert d'). — Sur les équations du mouvement gyroscopique des projectiles stables (*C. R. Acad. Sc.*, 20 mars 1933).
130. KAMPÉ DE FÉRIET et FOEX. — L'enregistrement photographique des projectiles (*Congrès International de Mécanique appliquée*, Zurich, 1926).
131. РОПОВ (Kyrill). — Das Hauptproblem der ausseren Ballistik (Leipzig, 1932, *Akademische Verlagsgesellschaft*).
132. GARNIER (Ingénieur général M.). — Sur la manière de corriger *a priori* les éléments d'un tir (*M. A. F.*, 1933).



---

## TABLE DES MATIÈRES.

---

	Pages.
PRÉFACE .....	I
CHAPITRE I. — <i>Le problème des trajectoires</i> .....	3
La fonction de résistance et le degré de résistance.....	5
Variation de la densité de l'air avec l'altitude.....	6
Les équations d'une trajectoire.....	7
Caractères élémentaires d'une trajectoire.....	8
CHAPITRE II. — <i>Classifications générales</i> .....	10
CHAPITRE III. — <i>Euler</i> .....	14
CHAPITRE IV. — <i>Jean Bernoulli-Didion</i> .....	17
CHAPITRE V. — <i>Borda-Siacci-Charbonnier</i> .....	19
CHAPITRE VI. — <i>Méthode de Gavre. Méthode Garnier-Haag. Méthode Garnier-Haag-Marcus</i> .....	24
CHAPITRE VII. — <i>Méthodes diverses</i> .....	28
Méthodes anglaises et américaines.....	28
Les résistances monomes.....	29
Méthodes allemandes.....	29
Méthode des vitesses fictives.....	29
Méthode Dufrénois-Rousier.....	29
Tir vertical.....	29
CHAPITRE VIII. — <i>Perturbations et corrections</i> .....	30
CHAPITRE IX. — <i>Le mouvement pendulaire. Stabilité. Dérivation</i> .....	32
1. Introduction.....	32
2. Les éléments de la trajectoire plane. La fonction de stabilité.....	36
3. Histoire de la théorie du mouvement pendulaire.....	38
4. Les mouvements d'oscillation et les mouvements de révolution.....	41
5. L'écart vrai et l'écart conventionnel.....	42
6. Histoire de la théorie du mouvement pendulaire ( <i>suite</i> ).....	43
7. Questions diverses.....	44
8. Conclusion.....	45
BIBLIOGRAPHIE.....	47

